Ottonis Gibelii Femaria-Holsati Introductio Musicae Theoreticae Didacticae

Gibel, Otto

Bremae, 1660

VD17 1:645303U

urn:nbn:de:gbv:46:1-4984

Schelwes

OTTONIS GIBELII

Femariâ-Holſati

INTRODUCTIO MUSICÆ THEORETICÆ DIDACTICÆ,

In quâ

Præcipua ejus Principia, cumprimis vero Mathematica, in gratiam omnium Φιλομούσων ad veram Scientiarum methodum concinnata, ſummâ pariter perſpicuitate ac brevitate proponuntur; nec tantùm ad MONOCHORDUM, ſed alia quoq; hodie uſitatiora & nobiliora Inſtrumenta, tùm ſecundùm veterem tùm novam Muſices rationem, accuratè applicantur.

PARS GENERALIS.

Πᾶς τῶν Θείων Μαθημάτων ἀμελέτητος Μυσικὸς εἰσίτω.

BREMÆ,

Typis & ſumptibus JACOBI KÖHLERI, ANNO MDCLX.

Julii Caesaris Bracciani AD. MDCLXIII — 45

Illustrissimo & Celsissimo
COMITI ac DOMINO,

DN. PHILIPPO,
Comiti Schaumburgi, Lippiæ ac Sternbergæ, &c. Domino

suo Clementissimo

Humillimo animo

D. D. D.

Illuſtrisſime ac Celſisſime
Comes, Domine Clementisſime,

QUanta ſit Diſciplinarum Mathematicarum Dignitas ac Præſtantia, quàm latè item pateat earum Uſus in cæteris quoque Scientiis & Artibus rectè percipiendis, neminem fugit, niſi qui rei litterariæ planè eſt hoſpes. Sicut & hoc nemo eruditorum ignorat, easdem apud Intelligentes cùm ad omnes actiones humanas, tùm ad Rempublicam bene inſtituendam & adminiſtrandam, pacis & belli temporibus, non tam utiles quàm omnino neceſſarias ſemper eſſe habitas. Quæ porró harum perſpecta, & cum incredibili voluptate conjuncta Necesſitas atque Utilitas, omnibus ſeculis mortalium animos adeó affecit, ut non homines ſolùm Privati ſed Summi quoque Viri, Imperatores, Reges, Duces, Principes, Comites aliique Magnates, mirum in modum eas adamárint, innumeris beneficiis & ſumtibus conſervarint ac propagárint, imó ipſi denique nonnulli in hiſce præſtantisſimi evaſerint Artifices: cujus rei exempla Mathematicorum paginæ pasſim exhibent. Ego autem hîc loci ut tribus duntaxat verbis innuam, quid & quatenus Scientiæ Mathematicæ ad Muſicam capeſſendam conferant, id ſanè audacter dico & affirmare habeo, Principia Mathematica fulcrum & basin totius esse Musices, & quibus tanquam Ariadnes filo in omnibus intricatioribus difficultatibus unicè utendum. Etsi veró hæc ita se habent, nulla tamen Pars Musices á paucioribus hactenus fuit exculta; quám ipsa Theoretica, ejusmodi fundamina ex Mathesi desumta continens. Qua de re Johannes Lippius S. Theol. D. & tam scientia Musica quám universa Philosophia Vir Clarissimus, ante quadraginta aliquot annos alicubi hæc emisit verba: *Quî fit*, inquiens, *ut Harmonia Musica quoad Effectum hodie, si unquam aliàs, florentissima, neglectissima sit quoad Causas & Fundamenta genuina Methodica? Mathematici eam transiliunt: Cantores nesciunt: nil curant Componistæ.* Id quod quám verè sit dictum, & quomodo, aliás fortè dabitur excutiendi locus. Etenim post Græcos, (Euclidem intelligo, Nicomachum Gerasenum, Gaudentium, Aristidem Quintilianum, Didymum, Ptolemæum, & qui sunt cæteri) item post Severinum Boëtium, Romanum, nemo ferè de hujusmodi rebus accuratum & exquisitum quicquam litteris mandavit, præter JOSEPHUM ZARLINUM Clodiensem Italum, qui Venetiis ante seculum ferme Capellæ (uti loquimur) fuit Magister. Is adeó primus & optimus est inter Recentiores Autor, quippe qui, Vir in suo genere eruditissimus, & cujus divini ingenii acumen in omnibus paginis elucet, stupenda cum cura & diligentia

aliquot

aliquot libros Institutionum & Demonstrationum Harmonicarum (quos vocat) conscripsit, in quibus universam Musicen, tam Theoreticam quám Practicam, tanta dexteritate & fidelitate docet, ut jure merito ipsum idcirco maneat fama & gloria sempiterna. Nec ita multó post Nobilis quidam Florentinus, *Vincentius Galileus*, Vir etiam multæ lectionis variæque eruditionis, tale quid præstitit in Dialogo *della Musica antica e moderna*. Verúm, quia uterque in peregrino, Italico videlicet Idiomate, scripsit, ad paucorum Musicorum pervenerunt manûs, siquidem nec ab omnibus intelligi poterant: tum etiam suprá nominatus Boëtius uná cum Antesignanis suis Græcis, non nisi in secretioribus Bibliothecis continebatur & coërcebatur. Hinc in Germania isthoc studium Musicum Theoreticum rarum prorsus atq; infrequens fuit, quippe cúm plurimis ad vera ejus Principia manuductio quasi denegaretur, donec tandem Vir CL. & Excellentissimus *Sethus Calvisius* senior, Scholæ quondam Lipsiensis Cantor optimè meritus, Linguarum & Matheseos peritissimus, ex jam dicto Zarlino aliisque, ejusmodi vera Principia Musica Theoretica in sua transtulit scripta, Germanorúmque posteritati meliore de notá commendavit: quem deinceps præter superius citatum *D. Iohannem Lippium* cumprimis quoque secuti sunt *Henricus Baryphonus* & *Henricus Grimmius*,

 Canto-

Cantores, ille Scholæ Quedlinburgensis, hic Magdeburgensis, Viri ſanè Litteratisſimi, ac Muſici, quà Praxi quà Theoria præſtantisſimi.

Quandoquidem veró & ego in ſimili functione Scholaſtica conſtitutus Muſicam jam ultra aliquot viginti annos tracto, mihi quoque idnegotii dari ſemper credidi, omne meum ſtudium, operam, laborem, diligentiam eó conferre & dirigere, ut autoritate atque exemplo talium Excellentisſimorum Muſicorum, non particulæ tantúm Muſices, ſed univerſæ hujus nobilisſimæ Scientiæ & Artis Principia genuina juventuti traderem, necnon, quantum pro ingenioli mei poſſem tenuitate, hactenus nondum ſatis cognita & exculta quædam, ad poſteros transmitterem. Id quod conatus, tandem effeci, ut operis & horis ſuccifivis ſuper cætera, quæ jam antehac divulgavi, talia etiam atque hoc Opuſculum continet, in chartas conjecerim; quanquam hoc ipſum, deficientibus ſumtibus, neque dum planè integrum, ſed primam duntaxat ejus Partem hîc expromo; alteram interim Partem, Deo ſinente & juvante, propediem quoque ſubſecuturam promittens.

Hoc itaque ſtudiorum meorum libamen, *Tibi, Illuſtrisſime Comes*, offero & conſecro, quod Celſ. T. cum omnibus Litteris & Artibus, túm inprimis etiam divina illa ac nunquam ſatis laudata Muſice vehementer delectari

ctari sciam: humillimis precibus contendens, ut Cels. T. laborem hunc meum qualemcunque & quantulumcunque Clementi ac sereno vultu, manibusque benignis accipere, fovere, tueri; & non tam ipsum exile & levidense Munusculum, quám demisſisſimum offerentis animum Cels. T. servitia humillima præbere gestientem, respicere; conatibusque meis, juventuti litterariæ, ut spero, proficuis & utilibus, Clementia ac Gratia sua calcar addere dignetur. Deus ter Opt. Max. Cels. T. quám diutisſimè sospitet propitia sua benignitate, omnique prosperitatis, benedictionis felicitatisque copia, una cum Celsisſima Conjuge & universa Illustrissima Familia, maximo subditorum bono, conservet. Ita vovebam & scribebam MINDÆ 4. Iduum Martii Anno CIↃ IↃC LX.

Illustrisſimæ Celsitudinis Tuæ

Humillimus Cliens

OTTO GIBELIUS

Cantor Scholæ Mindensis.

AD

Clarissimum & Eximium

Dn. OTTONEM GIBELIUM

Introductionem Musicam edentem,

*

ETsic ad laudem doctis conatibus altum
Affectas iter, inq; tua statione celebris
Cantor, quæ verè possunt ornare fidelem
Aggrederis, dignosq; tuo meditando labores
Officio, pulchrè spartam, quam nactus es, ornas,
Illud agens prodesse queas tironibus, atque
Commonstres planè secreta minoribus almæ
Musicæ, & optatâ brevitate benè omnia pandis
Quæ jucundorum sunt fundamenta sonorum,
Adq; sibi leges artis modulatio poscit
Principia, O studium Sophocleo carmine dignum!
Hoc quis propositum sat dignis laudibus almum
Ornabit, simul atq; tuo dignissima honore
Exponet? Certè hæc superant meletemata laudem. (templum
Musarum resonare doces venerabile
Voces harmonicas, & doctis cantibus imples (usus
Atria sancta scholæ pulchris concentibus
Vt pueri moti studia hæc ad clara ferantur,
Solertes facilem juvenes mirentur & artem
Suave melos cupidi tenerumque effingere cantum.
Occulto veluti crescit felicior ævo
Arbor, cum magno sylvæ florentis honore;
Sic nomen crescit docti fidique Gibeli
Quem pia commendant resonantis cymbala plectri,
Harmonicusque cui labor est ante omnia curæ,
Incipit eximium sacro Apolline judice cantum (mam
Fingere, præripiet que acri conamine pal-
Multis, inque scholis doctus celebrabitur Idem (tor.
Doctor jucundi & suavis modulaminis au-
Perge bonus studio, fortunatusq; labore,
Æternus comitatur honor quem gloria cantus
Extollit, doctæq; ornant clarantq; Camenæ.
Nunc age Vir Musis & Phoebo care Gibeli,
Quæ jacuere diu quasi constipata tenebris
Erue, & in lucem sanctissima munera profer,
Quam diu erunt Musæ, tangent tua plectra Camenæ.

M. SETHUS CALVISIUS Lips.
ad D. Nicol. Quedlinb. Pastor.

DISPOSITIO seu INDEX Librorum & Capitum Partis Generalis hujus INTRODUCTIONIS.

ΣΦΑΛΜΑΤΑ POTIORA,

Pag. 3. lin. 8. legatur ζώην. Pag. 6. lin. 3. *significet*. ib. lin. 10. *introductione*. ibid. lin. 13. εἴδησις. lin. 18. *Ptolemaus*, lin 21. αὐτῆς lin. ult. πρακτική. pag. 9. lin. 1. *astimabilem*. ib. lin. 10. *oriundum*. pag. 10. lin. 17. *Distributionem*. pag. 12. lin. 1. *videsis*. pag. 14. lin. 6. *Typus* pag. 17. lin. 12. *affectûs*. pag. 20. lin. 3. *perfecta*, ib. lin. ult. *Magnitudinis*. pag. 21. lin. 1. *induunt*. pag. 23. initiò, linea dividenda AB non satis accuratè divisa est, quare isthæc divisio ex præcedenti descriptione castigetur, ac præterea sub unitate collocetur litera majuscula 𝕮 Alphabeti Germanici, quomodo & sequentes literæ c omnes quatuor Figuræ Germanicæ esse debebant. Pag. 25. itidem in primâ figurâ Geometricâ tertia linea C duas tantummodò habeat partes, ultimâ deletâ. ib. lin. 11. *lib. 10. Euclidis*. pag. 28. lin 16. ἀριθμῶ. ib. καταμετρῇ. pag. 29. lin. 20. *Defin*. ib. lin. 21. ὅταν. pag. 30. lin. 17 *deficiat*. pag. 31. lin. 17. ἐςὶν. Pag. 35. lin. Penult. *mutua*. pag. 36. lin. 1. *Proportio*. item lin. 8. *Proportio*. Pag. 37. lin. 17. *Quoto*. ibid. *Hic* sine circumflexo. Pag. 38. lin. 5. ἐπιμόριος. ibid. *Terminus*. item lin. 7. Sesquialteram. Item lin. 16. *Divisione*. pag. 39. lin. 9. *Terminus*. pag. 40. lin. 5. *appellationi*. ib. lin. 9. *Supertripartiens*. pag. 41. lin. 14. *Termini*. pag. 43. sub 3. & 2. Primæ figuræ scribatur $1\frac{1}{2}$. pag. 44. lin. 3. *Termini*. It. lin. 3. *Terminis*. pag. 48. lin. 10. Ἀξιώματα. Ibid. lin. 20. *solùm*. pag. 50. lin. 16. *constare*. pag. 58. lin. 7. *ita ut*. Pag. 69. lin. 12. *ubique*. Item lin. 14. *Quòd si*. pag. 72. lin. ult. *quas secum fert*. Pag. 76. lin. 16. *Suprapositorum*. Ibid. lin. 20. *significativis*. pag. 78. lin. 21. *ac prodibunt*. Pag. 83. lin. pen. *continouato* Ibid. *poste l' una*. It. lin ult. *dopo l' altra*. pag. 85. linea. 19. *duc*. pag. 89. lin. antepenult. 135. 120. 108. pagina. 90. lin. 12. *actutum*. Pag. 94. in utroque schemate pro Numero 180. ponatur 108. Deinde etiam in posteriori superscribantur hi Numeri: $\frac{8}{9}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{15}{16}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{15}{16}$. Pag. 95. lin. 21. *collatus*. pag. 97. lin. antep. *Numerus Quadratus*. pag. 101. lin. 5. Proportionum inæqualium Numeri præcedentes sunto $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{3}$. Pag. 103. lin. 14. abjiciatur Comma post *illam*. Ibid. lin. penult. legatur *Denominator*. pag. 110. lin. 14. *lineola*. pag 112 lin. 14. *quaritur*. Ibid. in Διατυπώσει Exemplorum omissa punctula suis quæque locis addas, nimirum sub figuris ultimis & antepenultimis. Pag. 114. in Probationis Exemplo Secundo Quotus sit 63. pag. 117. in datis Exemplis punctula subscribenda corrigantur secundùm præcedentes Regulas; similiter quoque, sicubi Numeri non satis directè subscripti fuerint. Pag. 120. lin. 17. legatur *unum atque idem*. Pag. 122. in fine lineæ 2. deleatur syllaba *mi*. Ib. lin 10. legatur *imperatas*. Pag. 124. lin. 17. *linea transversa*. Ib. lin. 18. *Quibus*. It. lin. ult. *bifariam*. pag 127. lin. 14. pro d e scribatur d Q: item pro p a scribatur P a.

Reliqua leviora, aut qua transcursoria & desultoria nostra relectio nondum advertit, tum etiam in quibus sapiuscule ex defectu idoneorum Typorum aberratum, benevolus Lector ipsemet facilè dijudicabit ac emendabit. Talia potissimum erunt, quòd passim super ultimis syllabis Acutus pro Gravi, nec non in penultimis alicubi Acutus pro Circumflexo, reperiatur: item quod pag 26. figura illa trium Quadratorem non accuratè expressa sit: & pag 109. ubi Latera Quadratorum non aqualiter sunt posita & efformata, & qua id genus alia.

INTRODUCTIONIS
MUSICÆ THEORETICÆ DIDACTICÆ PROOEMIUM,
De Definitione ac Diviſione Muſices in genere.

M*VSICA, generatim ſic dicta, eſt Diſciplina Mathematica Complexa*, *occupata circa* ſonum *determinatâ Quantitate præditum*, *omnemq;* Cantum *&* Harmoniam *ex eo proficiſcentem.*

Definiti nomen unde derivetur, de hoc variant Autores, omnium autem optimè ſentire videntur, qui illud ſic dici ſtatuunt ἀπὸ τῶν Μουσῶν, *à Muſis.*

I. *Vel, quia Muſæ ab antiquis, tum hujus Scientiæ Autores, tum Cantorum ac Poëtarum ſive Muſicorum Præſides putabantur, & quæ ſemper Deorum hymnis ac miniſterio eſſent maximé intentæ.* Quin ipſo Muſarum nomine Muſicos Cantûs nonnulli intellexerunt, quo argumento etiam Camenas á canendo dici exiſtimárunt. Hinc Macrobius lib. 2. in ſomn. Scip. cap. 3. Muſas eſſe mundi Cantum, etiam ruſtici ſciunt, qui eas Camenas, quaſi Canenas, á canendo dixerunt. Vide quoque Nat. Com. lib.7. Myth. cap. 15. & Geofr. Linocerium cap.1. Mythol. Musarum; nec non Mich. Prætorium in Syntag. Mus. Tomo 1. parte 2. Memb. 2. cap. 1.

II. *Vel* κατ' ἐξοχὴν; *quòd Musica, secundùm Platonem, omnes Musas, h.e. Scientias & Artes, quas vocant, Liberales amplectatur, nec sine universâ Philosophiâ tractari queat.* Prisci enim Musicam, teste Budæo, ipsam ἐγκυκλοπαιδείαν dixerunt, h.e. Quintiliano interprete,* Orbem illum Doctrinæ, quo omnes Disciplinæ continentur. Quare & hoc vocabulum passim apud Autores non solúm pro Musica, quam hodie peculiariter sic vocamus, aut Poëtica, sed pro Literis sive Artibus humanitatis, usurpatum videmus; & μουσικὸς vel Latinum Musicus, pro docto & eleganti, quomodo Symmachus lib.3. Epist.74. Musica facundia dixit, pro peritia & elegantia litterata. Et Adverbium Μουσικῶς pro doctè & eleganter, item pro integrè, perfectè ac plenè, ut nihil desideretur, invenias. Hinc apud Comicos, qui se litteras didicisse negant, ajunt, se non didicisse Musicam: v.g. apud Aristophanem in Equit. Μουσικὴν οὐκ ἐπίσταμαι, Musicam non calleo, id est, illiteratus sum; quem aliás Græci una voce dicebant ἄμουσον. Atque adeò hoc nomine tanquam probro notabant antiquitus, non eum tantúm, qui á Musica, verúm ab omni Musarum commercio alienus esset, sicuti Weitzius ait in explicatione

*lib.1. de Legibus. *lib.1. Inst. cap.17.

tione verborum Terentii *: Ad ſtudium *hunc ſe applicâſſe* Muſicum. Vnde & teſte Fab. Quintiliano, in proverbium uſque Græcorum celebratum erat, indoctos á Gratiis & Muſis abeſſe: id quod Euripides quoque hiſce verſibus innuere videtur:

> Οὐ παύσομαι τὰς χάριτας ταῖς Μούσαις
> Συγκαταμιγνὺς ἡδίσταν συζυγίαν,
> Μὴ ζώην μετ' ἀμουσίας.

Quos Philip. Melanchthon ita vertit:

> Non deſinam Gratias Muſis
> Commiſcere ſuaviſſima conjunctione,
> Ne vivam alienus á Muſis.

Ubi ἀμουσία pro inſcitia ponitur & literarum ignorantia, quemadmodum ἄμουσος illiteratum denotat, ut antè diximus. Recentiores autem, inquit Budæus in Comment. ad numerorum modulationem hoc vocabulum tranſtulerunt, quia Muſica velut ludus animi & á curis vexati eſt requies, ex quo factum, ut Μουσική non ſolúm τὴν παιδείαν (Diſciplinam) ſed etiam τὴν παιδιὰν (luſum jocumve) ſignificet.

III. *Vel quoniam Muſica ad reliquas Scientias & Artes non ſolùm ſe habet uti Genus ad Species & Ideas* *, *ſed omnium quoq; principatum tenet* *, *ut quæ admirandâ ſuâ vi & efficaciâ homini affectûs movendi, ſibique peculiariter inſitâ & innatâ jucunditate longé cæteras antecedat.* Unde Ariſtides Quintilianus initio libri 1. de Muſ. ſcriptum reliquit, hanc ſcientiam apud Veteres magno in pretio habitam, &, ut ad reliquas utilem, prin-

 cipii

* *In Prol. Heautont.* * *Meibomius in Notis ad lib. 1. Ariſtoxeni p. 76.* * *Zarlin. 1. part. inſt. cap. 2.*

cipii & finis rationem obtinentem, ſummæ admirationi fuiſſe: præſertim cum non ut aliæ, circa unam rerum materiam, aut brevi temporis intervallo profutura occupetur, ſed omni ætati ac toti vitæ, omnibus denique actionibus ornatum perfectè conferat. Quem Autorem ibidem ulterius lege pag. 2. 3. & 4. necnon Meibomium ejus Commentatorem, ad pag. 2. v. 29. Porro quod incredibilis quædam ἐνέργεια, imó planè divinum quid in Muſica lateat, de hoc multi multa. Cumprimis veró ad hanc rem demonſtrandam, ſingularem contulit operam ex Veteribus idem jam citatus Ariſtides Quintilianus, qui integro ſuæ Muſicæ libro ſecundo nihil aliud tractat, ideóque illum vocat παιδευτικόν. Ex Junioribus autem Joſephus Zarlinus 2. part. Inſt. Harm. cap. 7. 8. & 9. ac poſt eum Michael Prætorius, qui de vi atque efficacia Muſices, varióque ejus uſu, in Syntagmatis ſui Muſici, Tomi 1. partis 2. Membro 1. tredecim integra capita complevit. Quibus præterea alios quoque lectu dignos addas, qui ſparſim in monumentis ſuis Muſicen eo nomine commendárunt, cujusmodi ſunt Cicero lib. 2. de legibus; Fab. Quintil. lib. 1. Inſt. cap. 17. Cenſorinus de die natali cap. 12. Macrobius lib. 2. in Somn. Scip. cap. 3. Boëtius lib. 1. de Muſ. c. 1. Dionyſius Longinus περὶ ὕψους pag. 59. Iſidorus lib. 3. Orig. cap. 16. Natal. Comes lib. 7. Myth. cap. 15. & lib. 9. cap. 6. Geofr. Linocerius in Myth. Muſ. cap. 1. Ioannes Lippius in Synopſi Muſices. Atque hæ

qui-

quidem ſunt potiſſimæ ac optimæ hujus Vocis Etymologiæ, quanquam & aliæ adhuc á quibusdam proferuntur. *Sunt enim*, teſte Zarlino 1. part. Inſt. cap. 10. *qui Muſicen ita nuncupari opinantur à* μωῦ *Voce Ægyptiâ ſeu Chaldæâ potiùs, quæ ipſis ſignificabat aquam, & à Græcâ voce* ὁ ἦχος. *ſonus; quaſi per* aquæ ſonum *inventa*: cujus etiam opinionis eſt IOANNES BOCATIVS in libris de Genealogia Deorum. Fortaſſe, quia Thales Mileſius *Aquam Principium omnium rerum* dixit, prout in Fragmento Cenſorini cap. 1. traditur: Vel quod, uti Varro ſcribit, *Muſica tribus modis naſcatur, aut ex ſono Aquæ; aut per repercusſionem Aeris; aut ex Voce.* Alii denique arbitrati ſunt, *Muſicam ita vocatam, quòd juxta aquam ſit inventa, non verò ex ſono ipſius; nempe quia* Pan *paſtorum Venatorumq; Deus ad Ladonem Arcadiæ flumen fiſtulam paſtoralem inveniſſe creditus eſt.* De quo vide Natal. Comitem lib. 5. cap. 6. Ovidium lib. 1. Metam. & Mich. Prætorium cap. 3. memb. 2. ſect. 2. Tom. 1. Synt. Muſici. Atque tantum de vario Definiti ſeu Vocabuli Muſices etymo.

DEFINITIONEM autem ipſam quod attinet, novam hanc excogitare neceſſe fuit, ſiquidem nulla ferè talis dabatur, quæ generatim omnes ſimul Muſicæ Partes attingeret, qualem hîc deſiderabam. Primó enim, cum pauci Autores, ſive antiqui, ſive recentes, totam Muſicam, quoad omnes ejus Partes, tractárunt. Deinde magnus quoque vocabuli Muſices abuſus ſemper ferè fuit: quippe quod non ſolúm uſurpárunt pro parte ejus aliqua denotanda, verùm etiam nonnunquam pro ipſo Cantu aut Harmonia. E.g. ut Muſica Choralis & Figuralis ſæpe idem ſignificat, quod Cantus Choralis & Figuralis: unde etiam Germani noſtri ſic loqui conſuevêre, **eine Muſic machen oder anſtellen**; item, **ich hörte dort/ oder ſie hatten dort eine ſchöne Muſic** / & quæ his formulæ ſint ſimiles. Atque inde eſt, quod tam multæ ac variæ Definitiones Muſicæ exſtent, quarum quasdam hîc apponere & lectoris judicio ſubmittere libet. Nempe Bacchius in Introductione Artis *Muſicæ*, & Ariſtides Quintilianus lib. 1. de Muſica, hanc tradunt: *Muſice eſt Scientia Cantûs, eorumq́ quæ circa Cantum contingunt.* Quam ille Græcè ita pronunciavit: Μουσική ἐστιν εἴδησις μέλους, καὶ τῶν περὶ μέλος συμβαινόντων; hic veró eodem modo, niſi quod pro εἴδησις poſuit ἐπιστήμην. qui & alias Definitiones recitat: quod nimirum *Muſica* nonnullis ſit τέχνη θεωρητικὴ καὶ πρακτικὴ, τελείου μέλους καὶ ὀργανικοῦ, *Ars contemplativa & activa, perfecti Cantus & Organici*; aliis autem, τέχνη πρέποντος ἐν φωναῖς καὶ κινήσεσι, *Ars decori in Vocibus ac motibus*. Ptolomæus initio lib. de Muſica: Μουσική ἐστι ῥυθμοῦ, καὶ μέλους, καὶ πάσης ὀργανικῆς θεωρίας ἐπιστήμη, *Muſica eſt Scientia Rhythmi, & Cantûs, & omnis organicæ theoriæ*. Item alius quidam vetus Muſicus anonymus M. S. cujus vir CL. Henricus Lindenbrogius ad Cenſorinum cap. 10. mentionem facit: Μουσική ἐστιν ἐπιστήμη περὶ μέλος τέλειον, θεωρητική τε τῶν ἐν αὐτῇ καὶ τοῖς μέρεσιν αὐτῆς, *Muſica eſt Scientia circa Cantum perfectum, & theoretica eorum, quæ in ipſa ſunt, & partium ejus.* Vel, ἕξις θεωρητική τε καὶ πρακτικὴ, καὶ ποιητικὴ τῶν περὶ τὸ τέλειον μέλος, *Habitus theoreticus & practicus*

&

& poeticus eorum, quæ ſunt circa cantum perfectum. Cenſorinus de die natali cap. 10. ſic definit: *Muſica eſt ſcientia bene modulandi*: quam etiam Caſſiodorus habet. In Fragmento Cenſorini cap. 11. exſtat talis: *Muſica eſt peritia faciendorum & canendorum modorum.* Sed tantum de aliorum Definitionibus, cum nimis longum fuerit, nec omnino operæ pretium, omnes hic enumerare. Dicimus porró, | *Muſicam Diſciplinam* eſſe *Mathematicam*, quippe cum ea proxima ac potiſſima ſua principia ex *Matheſi* petat, ſicuti poſtea videbimus, adeóque *Arithmeticæ* & *Geometriæ* ſubordinetur, unde & *Complexa* dicitur. Nam *Mathematicæ ſcientiæ ſimplices*, quas & *Puras* vocant, ſunt, quæ occupantur circa ſolam Quantitatem, ut *Arithmetica & Geometria: Complexæ*, quas etiam *Mixtas* & *Medias* appellant, quæ his ſubalternantur, & occupatæ ſunt circa quantitatem hærentem, vel in corpore, ut *Coſmographia*, *Vranoſcopia* ſive *Aſtronomia* & *Geographia*; vel in Qualitate, ut *Muſica*, *Optica* & *Architectonica*. Vide Alſtedium in Methodo Admir. Mathem. lib. 6. cap. 2. item Zarlinum 1. part. Inſt. cap. 1. Videtur hic quidem & *Phyſica* ſubalternantis jus quoddam ſibi vendicare, utpote quæ Muſico ſuggerit *Sonum*, qui materia eſt omnis Modulationis; perinde ac Matheſis eidem ſuppeditat proxima Principia & Sonorum Formam, quæ ſunt Numeri & Proportiones: unde & Avicenna Muſicam ſua Principia ſumere dicit ex ſcientia Naturali, & illa, quæ tractat Numeros, ita ut Muſica nuncupari poſſit

Media

Media quædam ſcientia inter Mathematicam & Phyſicam, quomodo Zarlinus ait 1. part. Inſt. cap. 20. Attamen (velut idem Zarlinus ibidem hac in re decernit) quoniam *Forma* nobilior eſt, quam *Materia*, & Denominatio fieri debet á potiori, rectius dixerimus, Muſicam Scientiam Mathematicam, quám Phyſicam. Quem Autorem præter hæc quoque videas cap. 40. ejusdem partis. *Subjectum* ſeu *Materia Muſices* in Genere conſideratæ eſt, uti jam dictum, *Sonus*, quatenus eſt *Quantus*, h. e. Numero, Menſura ac Pondere æſtimabilis in corpore aliquo ſonoro. Numero ſcilicet ac Menſura æſtimatur Sonus, quemadmodum Monochordi dimenſio & uſus oſtendit; Pondere autem quoque examinari poteſt, ſicuti Pythagoras fecit, qui exinde Conſonantiarum, reliquorúmque Intervallorum Formas omnium primó reperit: de quo Nicomachus lib. 1. Man. Harm. cap. 6. Ariſtid. Quintilianus initio lib. 3. de Muſ. Gaudentius in Introduct. Harm. pag. 13. Boëtius lib. 1. Muſ. cap. 10. & 11. Macrobius lib. 2. in Somn. Scip. cap 1. Cenſorinus de die natali cap. 10. Jamblichus lib. 1. de vita Pythag cap. 26. Zarlinus 2. part. Inſt. cap. 3. & qui ſunt plures. Alii alia ſubjecta Muſicæ ſubſternunt, uti Zarlinus, qui part. 1. Inſt. cap. 18. id eſſe autumat *Numerum Sonorum*. Et Hippolytus Hubmeierus Pædagogiarcha quondam Geranus, Decad. 1. Quæſt. 9. Diſput. Philoſoph. *Sonum Numeratum* ſtatuit, quod autem ſubjectum Calviſius 3. Exerc. Muſ. Quæſt. 1. repu-

repudiat, ejus loco supponens *Sonum Numero æstimabilem* in Corpore Sonoro; quem nos potissimum secuti sumus. *Quantitas* autem Soni Musici *finita* ac *determinata* sit oportet. Cum enim ipsa natura ab initio abhorreat, quippe quæ semper finem quærit, teste Aristotele lib 1. de Gen. Animal. cap. 1. adeóque nec scientia, nec sensus infinitorum unquam sit capax, Musica Sonum & Intervalla postulat determinata, quæ vel Voce humana, vel Instrumentis Musicis exprimi, & sensu atque proportionibus dijudicari possunt, quomodo Calvisius inquit 3. Exerc. Mus. Quæst. 12. pag. 41. Confer quoque Aristotelem lib. 1. Phys. cap. 4. & lib. 3. cap. 5. Metaph. lib 11. cap. 9. necnon Pachymerium in Aristot. de insec. lin. cap. 1. Gaudentium in Introd. Harm p. 12. Euclidem. in Introd. Harm. pag. 3. & in eum Meibomium pag. 50. & seqq. adhæc Zarlinum 1. part. Inst. cap. 17. Tandem in Definitione posuimus, quod Musica versetur circa *Cantum* & *Harmoniam*; non veró quemlibet Cantum, sed duntaxat è tali, qualem diximus, Sono ordinum, qui vel *Voce* fiat *naturali*, vel *Instrumentis*, uti Aristoxenus ait lib. 2. Elem. Harm. pag. 33. Nec enim propriè Harmonia alia ad Musicen pertinet, nisi quæ ex Sonorum Intervallis eorumque compositione nascitur, etiam teste Cicerone lib. 1. Tusc. Quæstionum. Prisci alioquin omnem omnino *Symmetriam* aut *Congruentiam naturæ*, tam quæ in Macrocosmo, quam Microcosmo passim cernitur ac deprehenditur, & Græea voce ἁρμονίας generatim denotari solet, ad *Musicam* retulerunt. Unde *Psellus* in Comp. Mathem. *Musicam describit, quòd sit Commensuratio quædam & Proportionalitas, nimirum Harmonia universi existens*: quem ibi porró videas. Nec non *Iosephus Zarlinus* 1 part. Inst. cap. 5. ait, *Musicam in genere loquendo nihil esse aliud nisi Harmoniam*: quæ secundúm Empedoclem sit illa *lis* & amicitia, ex qua omnia generantur, id est, (ut ipse loquitur) discordans quædam Concordia. Cujusmodi Harmoniæ generatim sic consideratæ Autores passim mentionem faciunt, ut Nicomachus Gerasenus lib. 1. Harm. Man. cap. 3. Aristides Quintil. lib. 1. de Mus. mihi pag. 3. & 5. Macrobius in Somn. Scip. lib. 1. cap. 6. & lib. 2. cap. 1. 2. 3. & 4. Censorinus de die nat. cap. 12 & 13. Polyd. Vergilius lib. 1. cap. 9. de rer. inventoribus, aliíque plures.

Hactenus de *Definitione Musices*, generatim sic sumto vocabulo, nunc ad ipsius *Destributionem* accedamus: in qua multúm quoque variant Autores, sicuti ex subsequentibus patebit. Omnem autem istam varietatem tribus hisce Classibus includemus. Primó, ut ostendatur *Musices apud veteres Græcos Divisio*; deinde *ea, quam Zarlinus* tradit; & postremo, *quæ nobis hodiernæ Musicæ* omnium optimè convenire videatur. Veterum itaque partitionem inprimis petas ex Aristide Quintiliano, utpote qui eam lib. 1. de Mus. mihi pag. 7. & 8. ordine describit,

quam,

quam, ut faciliùs á quovis comprehenderetur, Vir CL. Marcus Meibomius hac Tabula propoſuit.

- MUSICÆ
  - alia eſt pars *Theoretica*: cujus rurſus Partes duæ,
    - *Phyſica*: quæ dividitur in
      - *Arithmeticam.*
      - *Phyſicam*, generi cognominem.
    - *Artificialis*; quæ dividitur in
      - *Harmonicam.*
      - *Rhythmicam.*
      - *Metricam.*
  - alia *Practica*: cujus item Partes duæ,
    - *Vſualis*; cujus Partes ſunt
      - *Melopœia.*
      - *Rhythmopœia.*
      - *Poëſis.*
    - *Enarrativa*; cujus Partes
      - *Organica.*
      - *Odica.*
      - *Hypocritica.*

Quæ ſingulæ partes quid ſint, docet idem Ariſtides lib. 1. á pag. 9. usque ad finem ejusdem libri. Alii veró Muſicam partiti ſunt tantum in *Harmonicam*, *Rhythmicam* & *Metricam*: ac tum deinde in *Organicam*, *Poeticam* & *Hypocriticam.* Quod Porphyrius atteſtatur Commentario in 1. Caput libri 1. Harmon. Ptolemæi, his verbis: Τὴν Μουσικὴν σύμπασαν διαιρεῖν εἰώθασιν εἴς τε τὴν Ἁρμονικὴν καλουμένην πραγματείαν, εἴς τε τὴν Ῥυθμικὴν, καὶ τὴν Μετρικήν; εἴς τε Ὀργανικὴν καὶ τὴν ἰδίως κατ' ἐξοχὴν Ποιητικὴν καλουμένην, καὶ τὴν ταύτης Ὑποκριτικήν. Μουσικοὶ γὰρ λέγονται πάντες οἱ μὲν περὶ ταῦτα τεχνῖται, Hoc eſt: *Muſicam omnem dividere conſueverunt in Harmonicam, quæ vocatur, tractationem, & in Rhythmicam ac Metricam; præterea in Organicam, & in eam, quæ propriè & per excellentiam Poetica vocatur, atq; in hujus Hypocriticam. Muſici enim dicuntur omnes, qui circa hæc verſantur Artifices.* Hæc Porphyrius. Qua de re videris etiam Meibomium in Ariſtoxenum pag. 75. in Euclidem pag. 41. ac denique in hunc Ariſtidem p. 206. & 207. Tantum de Veterum diſtributione.

Zarlinus autem lib. 1. Inſt. Harm. cap. 5. *Muſicam* ſic diſpeſcit. Primò in *Animaſticam* & *Organicam* Quarum prior ſit Harmonia, quæ naſcitur ex compoſitione variarum rerum ſibi invicem additarum & conjunctarum in aliquo corpore, etiamſi inter ſe ſint diſcrepantes; cujusmodi eſt mixtura quatuor Elementorum, aut aliarum Qualitatum in corpore aliquo animato: Altera veró ſit Harmonia, quæ variis Inſtrumentis producitur. Porró hanc *Organicam* denuó bifariam ſecat, in *Naturalem* & *Artificialem*, prout Inſtrumenta ſunt duplicia. Eſtque adeó *Organica Naturalis*, quæ viva voce, beneficio Inſtrumentorum naturalium, qualia ſunt Gula, Palatum, Lingua, Labra, Dentes, & tandem Pulmo; his quippe vox omnis formatur naturalis. *Artificialis* autem *Organica* eſt, quæ ab artificialibus Inſtrumentis, quæ humanæ ſunt inventiones, dependet; quorum Autor tria potiſſimúm genera agnoſcit. Videlicet, quód primum genus ſit *Da fiato*, i.e. eorum, quæ inſpirantur, ſive id fiat follium flatu, quale eſt Organum, Regale, &c; ſive oris humani, ut Tibia, Tuba, &c. Secundum *Da Chorde*, h.e. eorum, quæ conſtant aut Chordis æneis, ut Pandora, Cithara, Clavicymbalum, &c; aut nervis ex inteſtinis, velut Teſtudo, Violinum, &c; quæ omnia vel digitis vel

cala-

calamis moventur, vel etiam per arcum tensione, & Græcis propterea vocantur κρουστὰ ἔγχορδα: Tertium *Da battere*, i. e. quæ pulsantur per bacilla & malleolos, qualia sunt Tympanum, Campana, Cymbalum & similia, quæ exinde apud Græcos κρουστὰ ἄχορδα cluent. Sin autem (quod obiter hûc monuerim) accuratiorem ac pleniorem Instrumentorum Divisionem requiris, adeas Syntagma Musicum Mich. Prætorii, qui in Tomi 1. partis 2. ἐπιβλήματι sive Corollario, summa diligentia hanc rem persecutus est, omniáq; artificiosè tribus Synopsibus seu Tabellis delineavit & ob oculos posuit. Deinde veró Zarlinus utramque *Organicam*, tam *Artificialem*, quám *Naturalem* rursus subdividit in *Planam*, *Mensuratam*, *Rhythmicam* & *Metricam*. Cujusmodi Zarlinianæ Distributionis Tabella hæc esse potest, tametsi Autor ipse eam pauló aliter formavit:

MUSICA est
- *Animastica*,
  - *Mundana*,
  - vel
  - *Humana*,
- vel
- *Organica*,
  - *Naturalis*,
  - vel
  - *Artificialis*,
    - utraq;
      - *Plana.*
      - *Mensurata.*
      - *Rhythmica.*
      - *Metrica*

Ac tantum etiam de Zarlini Musices Distributione.

Quod si ergo nostram quoque Sententiam de eadem hac re aperiamus, non modo compendiosiorem, sed & perfectiorem (respectu veræ Musices) habebimus Diviſionem, ſi eam, quam ſubjecta Tabella exhibet, inſtituamus & ſequamur. Ex qua tum *Animaſtica* illa, tum etiam *Rhythmica* ac *Metrica*, eliminata eſt; & contra illæ duntaxat partes, quæ ſub *Organicâ*, quam Zarlinus vocat, comprehenſæ ſunt, retinentur, ac nova quadam methodo diſponuntur. Typis autem ipſius Synopſeos ſive Tabella hic eſt:

MUSICA eſt
- *Theoretica*,
  - *Hiſtorica*,
  - vel
  - *Didactica*,
- vel
- *Practica*,
  - *Melopoëtica*,
  - vel
  - *Modulatoria*,
  - utraq;
    - *Vocalis*.
    - *Inſtrumentalis*.
    - *Choralis*.
    - *Figuralis*.

Eſtque igitur ſecundúm hanc Tabellam Muſica 1. vel *Theoretica* vel *Practica*. *Theoretica* eſt, *quæ rerum Muſicarum tradit Cauſas & Fundamenta*. *Practica*, *quæ Theoremata illa in actum producit*. 2. *Theoretica* iterum ſubdividitur in *Hiſtoricam* & *Didacticam*. *Theoretica Hiſtorica eſt*, *quæ narrat originem & progreſſum* rerum Muſicarum, aliáque eó ſpectantia. *Theoretica Didactica* (de qua hìc ſpeciatim acturi ſumus) *eſt Scientia*, *quæ propriè occupatur Sonorum atque Intervallorum Muſicorum contemplatione*, *cùm ex Senſu*, *tùm verò maximê ex Principiis Mathematicis*, *oſtendens legitimas eorum in Numeris Formas*, *& quomodo hæ ſecundùm varias ſuas* χέσεις *ac proportiones inter ſe collatæ differant*. Boëtio finitur hæc Muſices Portio, *facultas acutorum graviumq́; Sonorum differentias Senſu ac Ratione* *perpen-*

perpendens. Quomodo & Ptolemæus, eandem appellans Harmonicen, dixit esse *facultatem percipiendi in sonitibus differentias, quæ sunt circa acutum & grave.* Zarlinus de eadem dicit cap. 10. part. 1. Institutionum Harmonicarum, quod sit *Magistra omnium Cantilenarum, quæ Sensu & Ratione considerat Sonos & Voces, Numeros, Proportiones, & earum Differentias.* Legatur quoque Calvisius 3. Exerc. Mus. Quæst. 1. 3. & 4. De reliquis Musicæ partibus alibi dicendi erit locus.

THEORETICA DIDACTICA partes habet duas: *Communem* seu *Generalem*; & *Propriam* seu *Specialem*.

Pars Communis seu *Generalis agit de Principiis Theoreticis in genere, & abstractè, quatenus nimirum à Materiâ suâ Musicâ, quæ est sonus, separata traduntur.*

Propria seu *Specialis eadem tractat in specie, & Concrete, ubi Sono veluti Materiæ suæ acommodata, per Monochordum aliaq; Instrumenta Musica Sensui exponuntur.*

PARTIS

PARTIS COMMUNIS sive GENERALIS

LIBER PRIMUS,

De Præcognitis quibusdam universalibus, Theoretico Musico perquam utilibus ac necessariis.

CAPUT. I.

De variis Principiis Musices in genere.

PRINCIPIA MUSICES alia sunt *Essentiæ*, alia *Cognitionis*.

Essentiæ Principia dicuntur Causæ, quæ Musices Essentiam constituunt. Suntque vel *interna*, ut *Materia* & *Forma*; vel *externa*, ut *Efficiens* & *Finis*.

Materia seu *Subjectum Universale*, uti jam antè dictum, *est* Sonus *quantus* sive *extensus*, *ex quo omnia constant Intervalla, omnisq; porrò Modulatio & Harmonia.*

Forma Musices est pro diversis ejus partibus *triplex*: 1. *Theoretica*, *quâ* Sonis *Mathematicè, secundùm Quantitatem inter se consideratis, certæ assignantur Proportiones & Numeri Arithmetici.* 2. *Melopoetica, quâ soni artificiosè disponuntur in condendis Harmoniis, sive Compositione Cantionum.* 3. *Modulatoria, quâ Cantilena composita scitè, & secundùm Artem canitur, idq; tam* Instrumentaliter, *quàm Vocaliter.* *Effi-*

Efficiens Causa Musices *prima est DEUS* ter Opt. Maximus, qui universa secundum *Pondus*, *Numerum*, *Mensuram & Harmoniam* dispofuit ac dimensus est. *Efficiens Secunda* est *Natura*, mater Sonorum, & *Ars*, h.e. Intellectus vel Ingenium hominis Musici.

Finis ejusdem *Summus* & *generalissimus est GLORIA DEI. Intermedius* vel *Subalternus* est *triplex* : *Theoreticus*, *Melopoeticus* & *Modulatorius*. *Theoreticus est vera ac solida Soni Musici, omniumq; ejus Affectionum cognitio. Melopoeticus est Cantilenarum artificiosa Compositio. Modulatorius est Cantionum Compositarum elegans & concinna Modulatio, ad movendos hominum affectus.*

Principia Cognitionis sunt, quibus Soni, Intervalla, & omnis deniq; Cantus aut Harmonia cognoscitur ac dijudicatur.

Hujusmodi autem Principia sumit Musica ex universa ferè *Philosophia*, ut suprà diximus ; quippe cum omnes Scientiæ & artes communi inter se vinculo illo Encyclopædico sint colligatæ & connexæ. Harum autem alia sunt *Remota*, alia *Proxima*.

Principia Remota sunt, & quidem maximè, quæ ex Metaphysicis, minùs verò, quæ ex Physicis hauriuntur. Quò etiam referenda sunt petita ex *Astronomiâ*, *Geographiâ*, *Opticâ*, *Mechanicâ*, &c. Item ex *Philosophia Practica*, qualia sunt *Ethica*, *Politica* & *Oeconomica* : de quibus Lippius in Synopsi Musices.

Proxima sunt, *quæ capiuntur ex Mathesi simplici: Arithmetica* & *Geometria*. Hisce enim duabus Scientiis Musica propriè subalternatur.

Caput II.

De QUANTITATE, quid & quotuplex sit.

QVANTITAS *Philosophis dicitur Accidens*, *quo Substantia denominatur extensa*, & *divisibilis in Partes extra Partes*. Item, *QVANTITAS est Ens reale*, *finitum*, *completum*, *habens partes extra partes*. Quæ enim non habent partes extra partes, incompleta sunt Entia, ut *Vnitas*, *Instans*, *Punctum*, &c. Vel, quomodo ipse Aristoteles habet libro 4. Metaph. cap. 13. initio: Ποσὸν λέγεται τὸ διαιρετὸν εἰς ἐνυπάρχοντα, ὧν ἑκάτερον, ἢ ἕκαστον, ἕν τι, καὶ τόδε τι, πέφυκεν εἶναι: *Quantum dicitur*, *quod in insita divisibile*, *quorum utrumque*, *aut singula*, *unum quid*, & *quod quid*, *apta sunt esse*.

Duplicem veró apud illos obtinet significationem. Vel enim capitur Metaphoricè pro *Quantitate Virtutis* sive *Vigoris*: vel propriè, pro *Quautitate Molis* seu *Dimensionis*.

Quantitas Virtutis sive *Vigoris est intensio aut remissio virium*, *perfectio aut imperfectio naturæ*. Unde *Intensivam* vocant *Quantitatem*, secundum quam gradûs perfectionum intenduntur. Ut, cum dicimus aliquem esse magnanimum, calo-

calorem aliquem esse altero majorem, &c. de qua Scaliger de Caus. L.L. & Excerc. 12. Sect. 3. item Scarfius in Man. logico.

Quantitas autem *Molis* sive *Dimensionis est*, *qua subjectum extenditur*, *itaut habeat partes extra partes*, *& sit partibile in partes*. Atque hæc propriè dicta est Quantitas, quæ *Extensiva* vocatur, & ad Mathesin pertinet. Hæc vero rursus distribuitur in *Quantitatem Continuam* & *Discretam*, seu *Magnitudinem & Multitudinem*.

QVANTITAS CONTINVA sive MAGNITVDO, *Græcè* Ποσὸν συνεχὲς, ἢ Μέγεθος, *vocatur*, *cujus partes communi aliquo termino copulantur*. Aristot. lib. Categ. Cap. de Quantitate. *Terminus* autem *Communis* hic dicitur, qui unius partis initium, & simul alterius extremum est. *Species* hujus Quantitatis propriè sunt *tres*: Γραμμή, Ἐπιφάνεια ἢ Ἐπίπεδον, καὶ Σῶμα ἢ Στερεόν, *Linea*, *Superficies*, *Extremitas* sive *Planum*, & *Corpus* vel *Solidum*. Quinam vero singularum harum Magnitudinum Communes sint Termini, quibus partes earum conjungantur, Aristoteles ibidem in Categoriis explicat. Nempe, quod lineæ Terminus Communis sit ἡ Στιγμή, Punctum; Superficiei, Linea; Corporis, Linea & Superficies. Hinc porrò docet lib. 1. de Cœlo cap. 1. & 4. Metaph. cap. 13. quod, quemadmodum triplex est *Magnitudo*, sic etiam triplex sit ejus *Dimensio*, videlicet Μῆκος, Πλάτος καὶ Βάθος, *Longitudo*, *Latitudo*, *& Profunditas*, quæ postrema, & *Altitudo*, & *Crassitudo* cluet. Et præter has tres ullam aliam, aut Magnitudinem, aut Dimensionem esse negat; siquidem juxta Pythagoréos omnia, quæ ternarium numeruw sortita sunt, persѕcta & absoluta censeantur. Illi namque eodem teste, * dicere soliti fuerunt, τὸ πᾶν καὶ τὰ πάντα τοῖς τρισὶν ὥρισθαι, *Omne ac Omnia Tribus definita esse*, quippe cum in ternione ratio inveniatur *Principii*, *Medii* & *Finis*; & quod sensim á natura perfectionem acquirit, id primo incipiat, deinde progrediatur, postremó terminetur. Atque adeo ex tribus istis Quantitatibus Continuis soli *Corpori* perfectam absolutionem convenire ostendit Philosophus, nuncupans id τὸ πάντῃ διαιρετόν, ex omni parte divisibile: nempe quia Linea uno duntaxat modo sectilis est, secundum *Longitudinem*; superficies duobus modis, secundum *Longitudinem* & *Latitudinem*, ut planities in mensa, convexitas in globo, &c; Corpus vero tripliciter, secundum *Longitudinem*, *Latitudinem* & *Profunditatem*. Vide Conimbricenses in dictum cap. 1. lib. 1. de Cœlo. Eodémque sensu *Corpus* appellari solet *Moles trinæ Dimensionis*. Veruntamen ad hasce tres Magnitudines pertinere etiam, testatur idem Aristoteles in Categoriis, *Locum* & *Tempus*. *Loci* enim partes, quæ singulas Corporis partes continent, eodem Termino, quo Corporis partes, coaptari ait. Et *Temporis* Terminum statuit Communem, quo copulari concipimus Tempus Præsens cum Præterito & Futuro. Quin & alia huc quoque referri posse videntur, quæ videlicet Muagnitudinis naturam

* *lib. 1. de Cœlo cap. 1.*

turam

turam aliquo modo inducunt, ut *Sonus Muſicus*, quo de in *Parte Speciali*. Et tantum de *Quantitate Continua*; ſequitur nunc de *Diſcreta*.

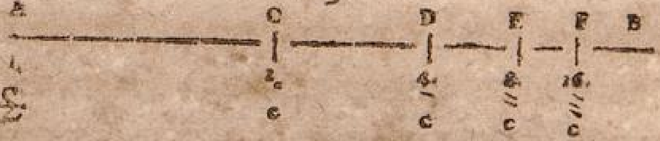
QVANTITAS DISCRETA ſeu MVLTITVDO, Græcè Ποσὸν διωρισμένον ἢ Πλῆθος, *dicitur*, *cujus partes ſeorſim poſitæ, & quaſi interpunctæ, non ita Communi Termino copulantur*. Ariſt. in Categ. cap. de Quant. Hujus *Species* ab eodem ibidem recenſentur hæ *duæ*: Ἀριθμὸς καὶ Λόγος, *Numerus & Oratio*. Intelligit autem Orationem, non mentalem, nec ſcriptam, ſed voce prolatam, quam aliás dicimus λόγον προφορικὸν; & quidem quatenus ſignificat multitudinem ſecundum Intervalla & menſuras dictionum. Vide Scarfium in Man. Log. De quibus Ariſtoteles ſic: *Numeri partium Terminus Communis nullus eſt, quo partes ejus conjungantur. Velut ſi Quinq; ſint partes Decem, nullo Communi Termino Quinque & Quinque conjuncta ſunt, ſed ſeparata; neque Tribus & Septem ullus Communis Terminus accommodatur. Similis eſt ratio Orationis. Nam quantam eſſe Orationem, ex hoc perſpici poteſt, quòd ſyllabâ brevi longáque ponderatur: id quod de Vocis Oratione intellectum volo. Partes enim ejus nullo Communi Termino coaptantur, quoniam Terminus Communis nullus eſt, quo ſyllabæ cohæreant, verùm per ſe quæque ſecreta eſt.* Hæc Ariſtoteles. Sed præterea etiam huc alia ab aliis referuntur, quibus Multitudinis nomen competit, ut ſunt: *Populus, Grex, Acervus Frumenti*, &c. quæ Zarlinus addit 1. Part. Inſt. cap. 17.

Poſtremò hîc quoque advertatur: I. *Omnem Quantitatem*

Continuam infinitè posse per additionem augeri, & per divisionem diminui : unde nunquam adeo magna datur Magnitudo, quin ea dari possit major aut minor. In *Numeris* vero non est item. Etsi enim Numerus quoque per Continuam additionem Unitatis in infinitum augeri potest, per 2. Postul. lib. 7. Euclidis, & Postul. 4. Clavii lib. 1. ejusdem; tamen in ejus diminutione tandem devenimus ad Unitatem individuam. Ipsius enim Unitatis dissectio vel fractio (quæ quidem alias etiam infinitè comminui potest) in Geometricis dimensionibus non habet locum.

II. *Quantitatem Continuam in partibus divisis, æquo ordine & eadem Propositione sese invicem consequentibus, infinité decrescere atque imminui; Discretam verò contrà tunc excrescere & augeri.* E. C. Data sit linea recta finita A B, hanc seca in duas æquales partes, in C: C B iterum divide bifariam in D: D B in E: E B in F: atque adeo deprehendes, Numeros harum partium infinitè excrescere, lineæ autem terminos magis ac magis constrictos decrescere, salvis tamen ubique iisdem Proportionibus. Quod ipsum quoque manifestum ac testatum faciunt *Proportiones Harmonicæ*: ubi, quamvis in continuata hujusmodi divisione secundum Progressionem Geometricam, earum etiam Termini pariter coarctentur, & Numeri Harmonici, Formam Intervalli exhibentes, augeantur, nihilominus tamen in arctioribus istis eadem est ac manet Propo tio, idemque Intervallum Musicum, quod antea in amplioribus erat terminis. Uti hic videre licet.

In



In hac enim partitione idem ubique permanet Intervallum τ̃ Διὰ πασῶν ſive Octavæ, & eadem Proportio, nempe Dupla, quæ hujus Intervalli ſive Conſonantiæ eſt Forma Mathematica. Sed hac de re fuſiùs in parte Speciali, ubi Monochordi oſtendemus Dimenſionem.

Caput III.

De Quantitatum SYMMETRIA & ASYMMETRIA; nec non de earundem RATIONALITATE ac IRRATIONALITATE.

SYMMETRIA vel COMMENSVRABILITAS eſt, ſecundùm quam Symmetræ ſive Commenſurabiles dicuntur Quantitates.

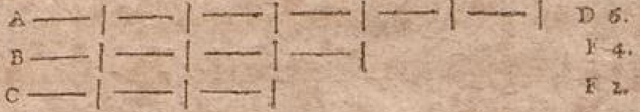
ASYMMETRIA vel INCOMMENSVRABILITAS, ſecundùm quam dicuntur Aſymmetræ ſeu Incommenſurabiles.

SYMMETRÆ ſive COMMENSVRABILES Quantitates appellantur, quas eadem menſura metitur. Eucl. 10. Elem. Def. 1. E. g. 6. & 4 ſunt Numeri Commenſurabiles, quia unum eundémque habent Menſorem, Binarium. Ut, 2

6 (1. 4 (2. 6 (3. ſic duæ lineæ, quarum
2 2 2

alte-

altera designata sit sex Unitatibus, altera quatuor, dicuntur Symmetræ, cum linea duas Unitates continens, utramque metiatur, tanquam communis mensura Senarii & Quaternarii. Ut:



Hic A & B sunt lineæ Commensurabiles, quia C utramque exactè metitur, alteram bis, alteram ter; perinde ut D & E mensurantur ab F. Eadem quoque est Commensurabilitas & Proportio in hisce, quando Termini minimi mensurantur per Uuitatem. . Ut:

Vide Clavium ad 5. & 6 Propos. lib. 10. Euclidis.

Similiter Commensurabiles dicuntur superficies, quas una eadémque superficies metitur; & Corpora sive Solida, Commensurabilia, quæ idem metitur Corpus sive Solidum.

ASYMMETRÆ contrà seu INCOMMENSURABILES vocantur Quantitates, quarum nullam Communem mensuram contingit reperiri. Euclid. ibid. Def. 2. Hujus generis perquammultæ sunt lineæ, quibus mensura aliqua Communis nullo modo dari potest. Sic etiam Superficies nuncupantur Incommensurabiles, & Corpora seu Solida Incommensurabilia, quæ nullam admittunt mensuram Communem. Omnis autem Asymmetria propriè

locum

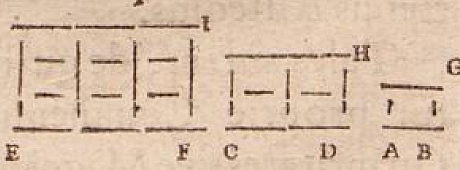
locum duntaxat habet in Magnitudinibus; in Numeris enim, si non alia Communis exstat Mensura, certè Unitas est, cujus respectu omnes Numeri dici possunt σύμμετροι. Vide Georg. Pachymerium in Aristotel. de insecabil. lin. cap. 2. & Zarlinum part. 1. Inst. cap. 21. Huc quædam etiam de Magnitudinibus Symmetris & Asymmetris notatu digna afferre lubet ex Alstedio cap. 2. Geom. Meth. admir. Mathematicorum, cujus verba hæc sunt: *Geometra in Operatione utitur certâ aliquâ mensurâ, ut grano, pede, passu. Si talis mensura datas aliquas magnitudines exactè metiatur, vocantur Magnitudines Symmetræ, licet non sint æquales. Vt bipedalis & tripedalis Magnitudo Symmetra est, quia Pes utramque exactè metitur; at longitudo digitalis pedali est asymmetra. Sic quæ diversis mensuris, putà ulnis & urnis mensurantur, asymmetra sunt. Diverso tamen respectu una eadémque mensura potest esse symmetra & asymmetra. Vt longitudo itineris trium milliarium est asymmetra longitudinis itineris sesquimilliaris, si integrum milliare pro mensurâ adhibeatur; est autem symmetra, si adhibeas dimidium milliare.* Hactenus Alstedius.

Tales autem, de quibus hactenus dictum est, vocantur propriè Commensurabiles & Incommensurabiles Quantitates sive Magnitudines *longitudine*; ut præter quas etiam inveniuntur Commensurabiles aut Incommensurabiles *potentiâ*, quæ ab Euclide dicto libro hunc in modum definiuntur:.

Rectæ lineæ potentiâ Commensurabiles sunt, cùm quadrata ea-

rum idem ſpatium metitur. Def. 3. *Incommenſurabiles autem, cùm quadratis earum nullum ſpatium, quod ſit Communis eorum menſura, contingit reperiri.* Def. 4.

Hic ſciendum, *linearum, quæ ſunt incommenſurabiles longitudine, alias eſſe ejusmodi, ut earum quadrata per ſuperficiem communem ſint commenſurabilia; aliàs verò, ut & quadrata earum incommenſurabilia ſint. Lineæ igitur longitudine incommenſurabiles, quarum quadrata ſunt incommenſurabilia, Euclidi dicuntur potentiâ commenſurabiles;* quia ſecundum earum potentias, ſive earum quadrata, commenſurabiles ſunt, licèt ipſa ſecundùm longitudinem ſint prorſus incommenſurabiles: *Reliquæ lineæ longitudine incommenſurabiles, quarum etiam quadrata incommenſurabilia ſunt, eidem vocantur incommenſurabiles potentiâ.* Porrò notandum eſt, *omnes lineas longitudine commenſurabiles, etiam commenſurabiles eſſe potentiâ: ita ut nullæ lineæ dari poſſint commenſurabiles longitudine, quin earum quoque quadrata ſint commenſurabilia, ſiquidem quadratum ex communi earum menſura deſcriptum tanquam communis menſura, earum quadrata metitur;* id quod ſubjecta figura oſtendit:



Quemadmodum enim recta A B metitur rectas C D, E F: ita quoque quadratum A G quadrata C H, E I metitur. *Non autem contrà omnes lineæ potentiâ commenſurabiles ſunt etiam commenſurabiles longitudine.* Sic *Omnes lineæ potentia incommenſurabiles ſunt quoque incommenſurabiles longitudine, non verò contrà.*

De

De quibus videas Clavium in Euclid. ad Defin. 4. & Propos. 9. libri decimi.

Hactenus de *Symmetria* & *Asymmetriâ*; sequitur nunc de *Rationalitate* ac *Irrationalitate*.

RATIONALITAS est, *secundùm quam Quantitates dicuntur Rationales.* *IRRATIONALITAS*, *secundùm quam Irrationales dicuntur*.

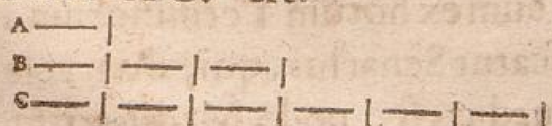
RATIONALES igitur vocantur Quantitates, quarum Habitudo seu Proportio certis Numeris exprimi potest. *IRRATIONALES contrà.* Hinc illæ ῥηταὶ appellantur & Effabiles; hæ ἄλογοι & Ineffabiles. ῥητὸν enim dicunt Mathematici, quod secundum certum Numerum cognoscitur. Adeóque per Def. 6. & 7. Euclid. lib. 10. *omnes Quantitates Symmetræ simul etiam sunt Rationales; & Asymmetræ, Irrationales.* E. g. Medietas Geometrica Proportionis Quadruplæ, quæ est Forma τοῦ δὶς διὰ πασῶν seu Duplicis Octavæ, in Numeris minimis 4. & 1. est Rationalis: nam Quaternarius, quem Termini hujus Proportionis in se ducti procreant, est Numerus perfectè Quadratus, cujus Radix datur Binarius, quo tanquam certo Numero ejus Proportionis Medietas exprimitur. Contrà verò, Medium Geometricum Proportionis Sesquialterius, quæ est Forma τοῦ διὰ πέντε sive quinque, in Numeris minimis 3. ad 2. Irrationale & Surdum dicitur, cúm ex horum Terminorum inter se Multiplicatione nascatur Senarius, qui, dum vera Radice caret, Numerus Surdus est, unde Medium illud Proportionale certo aliquo Numero explicari aut describi nequit. Verúm de hisce ac talibus evolvito lib. 10. Elem. Euclidis. Vide sis quoque Clavium ad Propos. 8. lib. 8. Euclidis; tum etiam Pachymerium in Aristot. de insecabil. lineis cap 2. nec non Zarlinum Part. 1. Inst. cap. 21. 37. & 38. & part. 2. cap. 15. 23. 24. & 25.

Caput IV.

De PARTE ALIQUOTA & NON-ALIQUOTA.

PARTEM ALIQUOTAM vel DIMETIENTEM dicunt Mathematici *Quantitatem minorem, quæ in majore, ceu toto, præcisè aliquoties continetur.* Vel, *quæ metitur suum totum, ita ut aliquoties repetita totum suum constituat.*

Euclides simpliciter eam vocat τὸ μέρος, *partem*; atque ita definit lib. 5. Def. 1. & lib. 7. Def. 3. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους (ἢ ἀριθμὸς ἀριθμοῦ) τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον; *Pars est Magnitudo Magnitudinis (aut Numerus Numeri) minor majoris, cùm minor metitur majorem.* E. g. Magnitudo A metiatur magnitudinem B ter sumta; & magnitudinem C sexies repetita; tunc dicetur magnitudo A, pars aliquota utriusque magnitudinis B & C. Ut:



Par ratio eſt *Numerorum*, ut cum Binarius dicitur Pars Aliquota Quaternarii, quia bis ſumtus præciſè eum metitur. *Quoniam verò omnis Numerus, per quem major ſuus, cum quo collatus eſt, exactè dividitur, Pars vocatur aliquota, fit ut plures Numeri majores ſæpe unam & eandem habeant partem aliquotam; & vice verſa, unus idémque Numerus major diverſas ſimul habeat partes aliquotas.* E.g. Numerus Quaternarius collatus cum 8. 12. 16. 20. 24. &c. horum omnium Numerorum eſt pars aliquota: 8. enim dividit bis; 12. ter; 16. quater; 20. quinquies; 24. ſexies. Sic horum 12. 18. 24. 30. 36. &c. Pars aliquota eſt Senarius, quia bis ſumtus metitur 12; ter ſumtus, 18; quater, 24. quinquies, 30; ſexies, 36. Et contra Numeri 576. partes aliquotæ ſunt omnes hi Numeri 3. 4. 6. 8. cum ſinguli illum metiantur. Sic etiam 360. Numerus Diviſores admittit 2. 3. 4. 5. 6. 8. 9. &c. qui ideo omnes ac ſinguli ipſius rectè vocantur partes aliquotæ.

Major autem illa Quantitas, ſive totum illud, quod Aliquotis ejusmodi partibus conſtat, dicitur Euclidi πολλαπλάσιον, *Multiplex*, juxta 2. Difin. lib. 5. & Def. 5. lib. 7. quæ ita habet: Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος; *Multiplex verò (Magnitudo aut Numerus) eſt major minoris, cùm majorem metitur minor*, vel, (quod idem) *quando major menſuratur à minore.*

PARS igitur NON-ALIQVOTA eſt, quæ Quantitatem majorem ſive Multiplicem ſeu Totum ſuum non perfectè metitur,

 ſed

sed aliquoties sumta ipsum vel excedit, vel ab eodem deficit. Hanc Clavius cum aliis nonnullis apellat PARTEM ALIQUANTAM. Cúmque adeó isthæc pars suum Totum non metiatur nisi per Unitates, idcirco Euclides talem Mensuram nominat *Partes*, non *Partem*, lib. 7 Def. 4. E. c. Binarius est Pars Non-Aliquota sive Aliquanta Quinarii: bis enim sumtus Quinarium non implet; ter sumtus, eundem superat. Hic ergo Binarius secundum Euclidem non *Pars* dicendus, sed *Partes*; quippe qui duas continet Unitates, quæ singulæ sunt quintæ partes Numeri Quinarii. Sic etiam Quinarius collatus cum Numero 18. Pars est Non-aliquota hujus majoris, ideóque Euclidi dicitur *Partes*, quód quinque contineat Unitates, quarum quælibet decima octava pars est Numeri 18. Similiter se res habet in Magnitudinibus. E.g Datæ sint Magnitudines A B, quarum A non metiatur B, ita ut ter repetita á magnitudine B deficiat; quater autem sumta eandem superet, appellabitur Magnitudo A *Pars Aliquanta*, vel *Non-Aliquota*, aut *Partes*. Ut:

A——|
B——|——|——|——|

Nomen autem partium est ex duobus illis Numeris, per quos Communis mensura utrumque metitur, videlicet eum, qui Partes dicitur, & eum, cujus ille partes appellatur. E. c. Senarius est Pars Non-Aliquota sive Partes Denarii, quorum Communis mensura est Binarius: hic cum Senarium metiatur

per

per Ternarium, & Denarium per Quinarium, Senarius dicitur Tres quintæ Denarii. Hoc pacto:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 2 & & & \\ \cancel{10}(1. & \cancel{6}(1. & \cancel{4}(2. & \| \; \cancel{6}(3. & \cancel{10}(5. \\ \cancel{6} & \cancel{4} & 2 & \cancel{2} & \cancel{2} \end{array}$$

Eadem quoque ratione eundem Numerum Senarium dicunt ſex decimas ejusdem Numeri Denarii, quando Unitas pro eorum Communi Menſura adhibetur, atque adeo illum metitur per 6, hunc vero per 10. Ita etiam Senarius eſt Partes Novenarii, quorum Communis Menſura eſt Ternarius: qui cum Senarium metiatur per Binarium, & Novenarium per Ternarium, Senarius hîc dicitur duæ tertiæ Partes Novenarii. Hoc modo:

$$\begin{array}{cccc} 3 & & & \\ \cancel{9}(1. & \cancel{6}(2. & \| \; \cancel{6}(2. & \cancel{9}(3. \\ \cancel{6} & \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{3} \end{array}$$

De quibus vide Clavium & Rhodium ad Defin. 4. lib. 7. Euclidis.

Caput V.

De TERMINO MATHEMATICO.

T*ERMINVS MATHEMATICVS dicitur omne id, quod alicujus extremum eſt.* Euclid. lib. 1. Def. 13. Ὅρος ἐστιν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

Sunt itaque Vocabula Synonyma: *Terminus*, *Finis*, *Extremum* & *Extremitas*. Deinde *Termini* ſunt, vel *Geometrici*, vel *Arithmetici*.

Ter-

Termini Geometrici sunt extrema Magnitudinum. Ut, Lineæ Termini sunt Puncta; Eucl. lib. 1 Def. 3. Superficiei extrema sive Termini sunt Lineæ; ibid. Def. 6. Corporis sive Solidi extremum est *Superficies*, lib. 11. Def. 2.

Arithmetici (aliàs Termini Numerales) sunt duo pluresve Numeri extremitates quasdam denotantes, aut Numerorum *abstractorum, aut Magnitudinum, aut Sonorum Harmonicorum* Numeris *descriptorum.*

Hi porro subdividuntur in *Terminos Proportionis & Proportionalitatis.*

Termini Proportionis (aliàs quoque Radicales Termini, item Radices Proportionis dicti) sunt duo Numeri*, quibus in eâdem Proportione nequeunt sumi minores.* Clavius ex Campano lib. 7. Eucl. Defin. 25.

Termini Proportionalitatis sunt duæ inter se comparandæ Proportiones, quæ ut plurimùm constant quatuor Terminis Radicalibus, interdum tamen tribus, quando medius bis sumitur. Pauciores vero, quam tres non dantur, siquidem omnis Analogia, teste Euclide lib. 5. Def. 9. ad minimum in tribus consistit Terminis: ut nimirum duo haberi possint *Antecedentes*, & totidem *Consequentes*.

CA-

Caput VI.

De HABITUDINE QUANTITATUM, ac primò, quid vocetur DIFFERENTIA.

EX Quantitatum Comparatione naſcitur *Habitudo* ſive *Relatio*, quæ Græcis Σχέσις appellatur, & *eſt nihil aliud, quàm certus quidam Terminorum inter ſe comparatorum mutuus Reſpectus*.

Eſtque triplex: *DIFFERENTIA*, *PROPORTIO* & *PROPORTIONALITAS*.

DIFFERENTIA ſive EXCESSUS vocatur Habitudo, quantum Terminus differt à Termino, cognoſciturq́ Subtractione. E.g. Differentia Terminorum 2.& 3. eſt Unitas; 3.& 5. eſt Binarius. Binarius enim á Ternario ſubductus, relinquit Unitatem; Ternarius á Quinario, Binarium. Sic in hac Numerorum ſerie 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10. ubique eſt Differentia ſive Exceſſus Unitas; in his 1.3.5.7.9.11.13. 15.17.19. Differentia eſt Binarius; inter hos 1.4.7.10. 13.16.19.22.25.28. Exceſſus vel Differentia eſt Ternarius. *Atq; ita Proportionum quoque Differentia Subductione inveſtigatur*. V.c. Si ſcire lubet, quænam ſit Differentia harum Proportionum 6.ad 5. & 5.ad 4. ſubtrahe 6. ad 5. ex 5. ad 4. juxta modum, qui infrá in libro ſecundo tradetur. Differentia restat 25. ad 24. Ut : $\frac{4}{5} * \frac{5}{6} (\frac{24}{25}$. Quare, si in Musicis subducimus Tertiam minorem, cujus Forma est Proportio Sesquiquinta, in Terminis minimis 6. ad 5. á Tertia majore, Proportione Sesquiquarta, in Terminis 5. ad 4. relinquitur Semitonium minus, Proportione Sesquivicesima quarta, in Terminis 25. ad 24.

Caput VII.

De PROPORTIONE.

PROPORTIO, Græcis λόγος dicta, definitur ab Euclide lib. 5. Def. 3 his verbis: Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν (ἢ ἀριθμῶν) ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα, ποιὰ σχέσις. *Proportio est duarum Magnitudinum (aut Numerorum duorum) ejusdem generis mutua quædam secundùm Quantitatem, Habitudo.*

Sunt quidem, qui τὸν λόγον dici malunt Rationem, & τὴν ἀναλογίαν, de qua in sequenti Capite, Proportionem; satius tamen videtur hac in re communem Philosophorum ac Mathematicorum loquendi consuetudinem sequi, quám citra necessitatem hos Artis Terminos ita variè & æquivocè usurpare.

Hìc observa:

Primò duarum duntaxat Quantitatum Habitudo Proportio definitur. Etsi enim quandoque plures Quantitates inter se comparandæ proponuntur, nihilominus tamen initio non

non nisi duo earum Termini simul ad se invicem conferuntur. Neque etiam pauciores, quám duos habet Terminos, cum quælibet Habitudo cognoscatur ex Relatione, Relatio autem omnis necessarió duos adminimum requirat Terminos, quorum alter, á quo ea fit, Antecedens; alter veró ad quem, Consequens Proportionis in Mathesi appellatur. *Secundò, hæ duæ res comparandæ sint Quantitates:* Etenim si Qualitates, Substantiæ & similia ad se invicem conferuntur, Proportio propriè non est. *Tertiò sint Quantitates ejusdem generis.* Nam si conferatur Linea cum Superficie, vel Numerus cum Linea, talis collatio non dicetur Proportio, quippe nec Linea & Superficies, nec Numerus & Linea, sunt ejusdem generis Quantitates: sed Lineam cum Linea, Superficiem cum Superficie, Numerum cum Numero, comparari oportet. *Quartò institui debet Comparatio talis secundùm Quantitatem*, h.e. *prout una Quantitas major est alterá, vel minor, vel eidem æqualis.* Ut, si conferatur Numerus cum Numero secundum Qualitatem, i.e. prout unus est niger, alter ruber, quamvis ambo sint ejusdem generis, tamen istiusmodi Comparatio non est vera Proportio, quia non fit secundnm Quantitatem seu Valorem. Vide Clavium ad 3. Defin. Euclid. lib 5. Et Laurembergium in Inst. Arithmet. lib. 3. Propos. 1. *Quinto Propositio dicitur muta Habitudo, cùm*, ut antè dictum, *in Relatione consistat unius Termini ad alterum.*

Quemadmodum autem quælibet Propositio duos habet Terminos, ita etiam duæ sint cujusque Proportionis Notæ, necessum est. Harum altera alteri subscribitur, in modum Fractionis, nisi quòd hîc Lineola sive virgula illa inter Numeratorem & Denominatorem omitti solet. Ut $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}$. Nonnulli tamen eam, perinde ut fit in Fractis, interjiciunt.

Et quoniam Termini inter se collati nunc unâ & eâdem, nunc diversâ constant Quantitate, duplex inde emergit Propositio: altera Æqualitatis, altera Inæqualitatis.

PROPORTIO ÆQUALITATIS est, cùm datæ Pro*portionis Termini sibi sunt æquales, ita ut alter altero sit nec major, nec minor.* Ut: $\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{3}$. &c. quæ Radix Proportionis dicenda potiùs, quàm Proportio.

INÆQUALITATIS PROPORTIO est, quando Termini datæ Proportionis sibi sunt inæquales: h.e. *quorum alter altero est vel major, vel minor.* Ut, $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}$. &c. Hic iterum duplicem Inæqualitatis Proportionis varietatem vulgó statuunt, nempe ut major Quantitas collata ad minorem, dicatur *Proportio majoris inæqualitatis*, & minor cum majore, *Proportio minoris inæqualitatis.* Atque tunc *minoris inæqualitatis* appellationi solent distinctionis ergo præfigere voculam *SUB*, ut quæ in majore inæqualitate vocatur *Proportio Dupla*, in minore vocetur *Subdupla.* Verumenimverò si ad Cleanthis lucernam hæc examinemus, quoniam utriusque eadem planè est natura, eædémque Differentiæ, ut, quicquid de una dicitur, de altera pariter accipiendum.

dum ſit; nec magis differunt, ac ſi dicam in *Additione Arithmeticâ, Tria & Duo eſſe Quinq;, Duo & Tria itidem*; aut in *Multiplicatione, Ter Duo non minùs eſſe Sex, quàm bis Tria*; hæc Diſtinctio tanquam ſupervacanea tollenda videtur, unà cum illo more, quo in Proportionibus Denominator ſuperiore loco, & Numerator inferiore collocari conſuevit: quippe cum iſta Notandi ratio Fractionibus Arithmeticis (á quibus tamen alias Proportionum doctrina tota ferè dependet) prorſus ſit contraria.

Cæterúm *Inæqualitatis Proportio* porró dividitur in *Quinque Claſſes* ſeu *Species*. Prima eſt *Multiplex*; Secunda *Superparticularis*; Tertia, *Superpartiens*; Quarta, *Multiplex Superparticularis*; Quinta, *Multiplex Superpartiens*.

Quemadmodum verò DIFFERENTIA dignoſcitur Terminorum Subductione, ſic PROPORTIO eorundem Diviſione; putâ Majoris Termini per Minorem, & ſi quid remanet poſt Diviſionem, id Fractorum inſtar unà cum Diviſore Quotæ adſcribitur. Hîc Quotus, & Proportionis valorem, & appellationis rationem aperit.

Prima igitur *Species* ſeu *Claſſis*, *MULTIPLEX PROPORTIO*, *Græcè* πολλαπλάσιος λόγος, *eſt cùm Quantitas ſive Terminus major minorem aliquoties exactè continet*. Quód ſi *bis*, *Proportio* vocatur *Dupla*; ſi *ter*, *Tripla*; ſi *quater*, *Quadrupla*, & ſic deinceps. Ut in hujusmodi Terminis $\frac{1}{2}. \frac{3}{6}. \frac{4}{8}. \frac{5}{10}.$ eſt Proportio *Dupla*, quippe minores dati in ſuis quique majoribus præciſè bis continentur, id quod eorum omnium poſt Diviſionem indicat Quotus (2. Hoc

 modo:

modo: $\frac{2}{1}(2.$ $\frac{6}{3}(2.$ $\frac{8}{4}(2.$ $\frac{10}{8}(2.$ sic inter hos Terminos $\frac{1}{3}.\ \frac{3}{9}.\ \frac{5}{15}.\ \frac{6}{18}.$ est Tripla Proportio (3. In his $\frac{1}{4}.\ \frac{3}{12}.\ \frac{5}{20}.\ \frac{6}{24}.$ est Quadrupla (4.

Secunda Species seu Classis, SUPERPARTICULARIS PROPORTIO, *Græcé* λόγος ἐπιμόριος, *est, cúm major Terminus minorem semel continet, ac unam insuper minoris partem.* Quæ pars, si minoris Termini est dimidia, *Sesquialteram* constituit *Proportionem*; si tertia Termini minoris, *Sesquitertiam*; si quarta, *Sesquiquartam*; & sic deinceps. Prior itaque Enunciationis sive Appellationis pars semper in hac Classe est particula *Sesqui*, & posterior pendet á *Divisore* seu remanentis Fractionis *Denominatore*. V. g inter hos Terminos $\frac{2}{4}.\ \frac{4}{6}.\ \frac{6}{9}.\ \frac{8}{12}.\ \frac{10}{15}.$ est Proportio Sesquialtera: majores enim dati includunt suos quique minores semel & insuper dimidiatam eorum partem, hoc modo:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{3}{2}(1\frac{1}{2}. & \frac{6}{4}(1\frac{2}{4}. & \frac{9}{6}(1\frac{3}{6}. & \frac{12}{8}(1\frac{4}{8}. & \frac{18}{10}(1\frac{5}{10}. \end{array}$$

Sic in his $\frac{3}{4}.\ \frac{6}{8}.\ \frac{9}{12}.\ \frac{12}{16}.\ \frac{15}{20}.$ est sesquitertia, hac Diversione:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{4}{3}(1\frac{1}{3}. & \frac{8}{6}(1\frac{2}{6}. & \frac{12}{9}(1\frac{3}{9}. & \frac{16}{12}(1\frac{4}{12}. & \frac{20}{18}(1\frac{5}{15}. \end{array}$$

Hic enim majores Termini minores semel comprehendunt, & tertiam eorum partem. In $\frac{4}{5}.\ \frac{8}{10}.\ \frac{12}{15}.\ \frac{16}{20}.\ \frac{20}{25}.$ Proportio est sesquiquarta, prout ex his apparet divisionibus:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{5}{4}(1\frac{1}{4}. & \frac{10}{8}(1\frac{2}{8}. & \frac{18}{12}(\frac{3}{12}. & \frac{20}{16}(1\frac{4}{16}. & \frac{28}{20}(1\frac{5}{20}. \end{array}$$

Ubi

Ubi major quisque ſuum minorem ſemel complecti-tur, & quartam ejus partem. Hîc notandum, Numeros inter ſe Compoſitos Terminorum Proportionalium in hac & ſequentibus ſpeciebus, ad veram Habitudinem in-veſtigandam, reducendos eſſe ad Numeros Minimos ſeu inter ſe Primos, per Canones Reductionis, de quibus in libro ſecundo.

Tertia Species SUPERPARTIENS PROPORTIO, Græce λόγος ἐπιμερής, *eſt, quando major Serminus, perinde ut fit in ſuperparticulari, minorem ſemel duntaxat continet, ſed aliquot inſu-per minoris partes.* Denominatio fit in hac Claſſe ab ipſa Specie & adjecta Fractione; atque ita hîc tres ſunt Enun-ciationis partes: Prima eſt vox *ſuperpartiens*; Secunda ca-pitur á Fractionis *Numeratore*; Tertia á *Denominatore* ejus-dem. E. g. Hi Termini $\frac{5}{3}$. dicuntur habere Proportio-nem Superpartientem duas Tertias: Quinque enim in-cludunt ipſa Tria ſemel, & inſuper duas ipſorum partes, i.e. duas Tertias, hoc modo:

$$\begin{matrix} 2 & \\ 5 & (1\tfrac{2}{3}. \\ 3 & \end{matrix}$$

Eadem quoque eſt Proportio in his Numeris inter ſe Compoſitis $\frac{6}{10}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{12}{20}\cdot\frac{15}{25}$. In hiſce autem $\frac{5}{8}\cdot\frac{10}{16}\cdot\frac{15}{24}\cdot\frac{30}{32}\cdot\frac{25}{40}$. Propor-tio eſt Superpartiens tres quintas, quorum quotus Mi-nimus eſt $(1\frac{3}{5}$. ſic $\frac{5}{9}\cdot\frac{10}{18}\cdot\frac{15}{2\ }\cdot\frac{20}{36}\cdot\frac{25}{45}$. Proportionem obtinent Su-perpartientem quatuor quintas, hoc quoto minimo $(1\frac{4}{5}$.

Aliis autem ſic efferuntur hujus Claſſis Proportiones.

I. quan-

I. Quando major Terminus minorem duabus minoris partibus excedit, Proportio vulgó nuncupatur *Superbipartiens* sive *Superbipertiens*, vel *super duas partiens*; si tribus, *Supertripartiens*, vel *super tres partiens*; si quatuor, *Superquadrupartiens*, vel *super quatuor partiens*: cui appelationi adhuc additur nomen Termini minoris, seu Denominatoris Fractionis. Ita *Superpartiens duas Tertias* dicitur *Superbipartiens Tertias*, aut *super duas partiens Tertias*; *Superpartiens tres Quintas*, vocatur *Supertripartiens Quintas*, aut *super tres partiens Quintas*; *Superpartiens quatuor Quintas*, *Superquadrupartiens Quintas*, sive *super quatuor partiens Quintas*. II. Utuntur quoque Ellipsi voculæ *partiens*, & sic loquuntur: *Superbitertia*; *Superbiquinta*; *Supertriquinta*; *Supertrecedimtricesima secunda*; *super novem decimasexta*: pro, *Superbipartiens Tertias*; *Superbipartiens Quintas*; *Supertripartiens Quintas*; *super tredecim partiens Tricesimas secundas*; *super novem partiens decimas sextas*. Vide Baryphonum in Pleiadibus Musicis pag. 9. 136. 147. & 151. III. *Marcus Meibomius* pro *Superpartiens* dici vult *Superpers*, quomodo & pro *Sesquitertius* &c. dicit *Supertertius* *, ad imitationem Græcorum ἐπίτριτος. Ipsius autem hæc sunt verba in Præfatione septem Antiq. Musicæ Autorum: *Venio ad majoris momenti Vocabula, quæ primus, felici, spero, sidere Latinæ civitati, adeoq; Mathematicis, restituo. Illa sunt, Supertertius, Superquartus, Superoctavus, pro Sesquitertius, Sesquiquartus, Sesquioctavus:* quæ

* *Quo genere loquendi etiam usus est Censorinus lib. de die Natali cap. 10.*

quæ ſummâ cum inſcitiâ, & doctrinæ intricatione, hactenus à doctiſſimis Viris ſunt uſurpata. Sed de iis alio loco ſum dicturus. Adeò autem illa placuere, ut ad eundem formationis modum, novo vocabulo Latinam Linguam ditare voluerim. Nam ut Græcorum ἐπιμόριον *Latini dixerunt Superparticulare; ita illorum* ἐπιμερὴς *vocarem ſuperpers, ut expers, quod ab ex & pars compoſitum, a in e, ſoni gratioris cauſâ, mutato. Idem factum videmus in iners, ab in & ars; item Solers; ſic quoque Superſtes eſt ex Superſtas.* IV. Idem hic *Meibomius* in Quoto Proportionum Superpartientium Fractionis Numeratorem Adverbialiter exprimit hoc modo: *Supernovies decies partiens ducenteſimas vigeſimas quartas; ſuper quinquies partiens vigeſimas ſeptimas* *, *pro Supernovendecim partiens ducenteſimas vigeſimas quartas; & ſuper quinque partiens vigeſimas ſeptimas;* quarum Proportionum Sermini Numerales & Radicales ſunt $\frac{224}{243}$ & $\frac{27}{32}$. qui poſt Diuiſionem hoſce dant Quotos:

1
29 45
243 (1 $\frac{19}{224}$. 32 (1 $\frac{5}{27}$.
224 27

Quarta Species MVLTIPLEX SVPER PARTICVLARIS, Græcè πολλαπλασιεπιμόριος λόγος *eſt, cùm major minorem aliquoties continet, ac prӕterea unam ejus particulam.* Sicuti autem hæc ſpecies ex multiplice & ſuperparticulari compoſita eſt, ita etiam ejus Appellatio. Priorem itaque Appellationis partem ſumit ex claſſe Multiplici, poſteriorem ex ſuperparticulari. E.c. Hi termini $\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{8}{20}\cdot\frac{10}{25}$.

F Pro-

* *In Notis ad Gaudentium pag. 38.*

Proportionem obtinent duplam sesquialteram: quorum quotus minimus est $(2\frac{1}{2}$. Et $\frac{3}{10}\cdot\frac{6}{20}\cdot\frac{9}{30}\cdot\frac{12}{40}\cdot\frac{15}{50}$. Triplam habent sesquitertiam, hoc quoto $(3\frac{1}{3}$. In his $\frac{5}{16}\cdot\frac{10}{32}\cdot\frac{15}{48}\cdot\frac{20}{64}\cdot\frac{25}{80}$. est proportio Tripla sesquiquinta, hoc quoto $(3\frac{1}{5}$.

Quinta Species MULTIPLEX SUPERPARTIENS, Græcé λόγος πολλαπλασιεπιμερὴς, *est, cùm major minorem etiam pluries continet, ut hæc præcedens, sed præterea aliquot ejus partes.* Et quia hæc quoque classis composita est, videlicet ex multiplici & superpartiente, ideo nomen etiam ex illis compositum accipit. Atque adeó prior prolationis pars ex classe multiplice, posterior ex superpartiente dependet. Ut, Termini $\frac{3}{8}\cdot\frac{6}{16}\cdot\frac{9}{24}\cdot\frac{12}{32}\cdot\frac{15}{40}$. Proportionem tenent Duplam superpartientem duas Tertias, hoc quoto $(2\frac{2}{3}$. Hi $\frac{5}{12}\cdot\frac{10}{24}\cdot\frac{15}{36}\cdot\frac{20}{48}\cdot\frac{25}{60}$. Duplam habent superpartientem duas quintas.

Caput VIII.

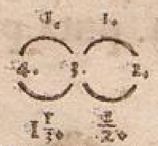
De PROPORTIONALITATE, quid & quotuplex.

PROPORTIONALITAS, Græcis ἀναλογία, *definitur Euclidi lib.* 5. *Def.* 8. ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης, *Comparatio seu Similitudo Proportionum.*

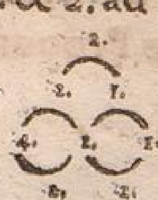
Quemadmodum enim λόγος sive Proportio est Habitudo duorum Terminorum Numeralium, ita ἀναλογία sive Proportionalitas est Habitudo duarum Proportionum: adeo-adeóque ad minimum (uti jam cap. 5. dictum) in tribus consistit Terminis, ut duo possint haberi Antecedentes, & duo Consequentes.

Species Proportionalitatum famosiores, & ab antiquis Philosophis, Phythagora, Platone, Aristotele, aliísque comprobatæ, *sunt hæ tres*: *ARITHMETICA, GEOMETRICA & HARMONICA sive MUSICA.*

PROPORTIONALITAS ARITHMETICA est, cùm dati termini æquali constant Differentia, inæquali verò Proportione. E. g. in his duabus Proportionibus $\frac{3}{4}.\frac{2}{3}$. utriusque Proportionis Termini eandem habent Differentiam, nempe Unitatem; prior autem Proportio 4. ad 3. est sesquitertia; posterior 3. ad 2. sesqui altera. Uti ex hoc schemate apparet:

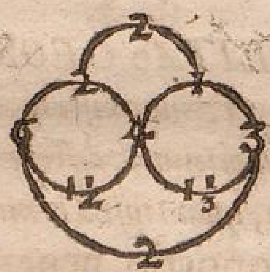


PROPORTIONALITAS GEOMETRICA est contrà, cùm propositi Termini Proportione constant æquali; Differentia autem inæquali; sic tamen, ut ejusmodi differentiæ inter se collatæ eandem habeant Proportionem, quam ipsi Termini. E. c. in his Terminis $\frac{2}{4}.\frac{1}{2}$. est eadem Proportio, nempe Dupla; Differentiæ autem in iis sunt inæquales. Nam inter 4. & 2. Differentia est Binarius; inter 2. & 1. Unitas: attamen & hæ ipsæ Differentiæ æquè inter se continent Proportionem Duplam ac 4. ad 2. & 2. ad 1. Cujus hoc est schema;



HAR-

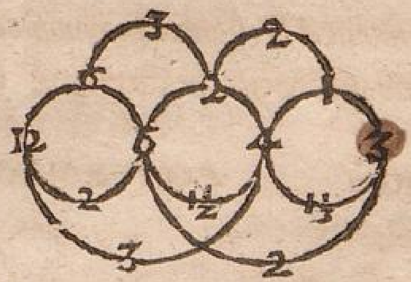
HARMONICA sive MUSICA PROPORTIONALITAS dicitur, quando Termini dati & Differentiâ, & Proportione constant inæquali; sic tamen, ut, positis tribus Terminis, Differentia prior ad posteriorem, eandem habeat Proportionem, quæ est Termini primi ad ultimum. Exempli ergo, in his duabus Proportionibus $\frac{4}{6}.\frac{3}{4}$. quæ tribus duntaxat constant Terminis 6.4.3. (siquidem medius hìc bis sumitur) Antecedentes duo Numeri sive Termini 6. & 4. Differentiam obtinent Binariam, & Proportionem Sesquialteram; duo autem consequentes 4. & 3. Differentiam habent Unitatem, & proportionem Sesquitertiam. Jam si duas istas Differentias, id est, Binarium cum Unitate confers, pariter in iis deprehendes Proportionem Duplam, atque in Terminis 6. ad 3. putá primi & ultimi. Schema ejus hoc est.



Hic etiam quatuor datis Terminis, eandem habet Proportionem Differentia prima ad secundam, quam habet Terminus primus ad tertium; & porró Differentia secunda ad tertiam se habet, ut Terminus secundus ad quartum. V. c. In hisce duabus Proportionibus $\frac{6}{12}.\frac{3}{4}$. quatuor

sunt

ſunt Termini 12. 6. 4. 3. Hîc prima & ſecunda Differentia, quæ ſunt Senarius & Binarius, eandem obtinent Proportionem, quam Numeri 12. & 4. nempe Triplam: atque iterum ſecunda & tertia Differentia, Binarius & Unitas, Proportionem eandem continent, quam Numeri 6. & 3. ſcilicet Duplam. Veluti ſuppoſitum oſtendit Schema:



Vide Clavium de Proportionalitatibus ad Definitionem 4. Euclidis libri quinti, pag. 432. nec non Laurembergium in Inſtitut. Arithmeticis lib. 3. Propos. 2. pag. 110. & 111.

Dicitur autem ſic Propotionalitas Harmonica ſive Muſica, quia plerunque ejus Numeri habent proportiones eas, in quibus Conſonantiæ Muſicæ conſiſtunt. Clavius dicto loco pag. 393. Id quod in datis exemplis alibi monſtrabimus.

Præter has tres Analogiarum Species *Boetius* adhuc agnoſcit *ſeptem* alias, & *Iordanus* octo, teſte *Zarlino* 1. parte Inſt. Harm. cap. 35. quarum tamen omnium in Muſicis vel exiguus, vel nullus penè uſus eſt. Inprimis veró celebris etiam eſt, tum illis, tum aliis *Muſicis & Mathematicis* *CONTRAHARMONICA PROPORTIONALITAS*, quæ tamen nihil aliud eſt, quám *inverſa Harmonica*, *quando nimirum prior Differentiæ Terminus ſe habet ad poſteriorem, ut datarum Proportionum Terminus ultimus ad primum: & quo loco in Harmonica ſita eſt Proportio major, ibi in Contraharmonica eſt Proportio minor; & ubi in illa eſt Proportio minor, in hac eſt major.* Diſcrimen autem *Harmonicæ* & *Contraharmonicæ Proportionalitatis* facilè cognoſces ex hoc utriuſque juxta ſe poſitæ Schemate:

HARMONICA. CONTRAHARMONICA.

Hic in *Harmonica*, Differentiæ prior Terminus, *Binarius*, ad poſteriorem, *Vnitatem*, eodem ſe habet modo, ut datarum Proportionum primus Terminus, *Senarius* ad ultimum, *Ternarium*: in Contraharmonica autem prior Differentiæ Terminus, *Vnitas*, ſe habet ad poſteriorem, *Binarium*, ut Terminus ultimus Proportionum, *Ternarius*, ad primum *Senarium*. Porrò, quemadmodum in Harmonica Analogia priori loco major Proportio eſt, Seſquialtera, & poſteriori loco minor, Seſquitertia: ſic in *Contraharmonica* priori loco eſt minor Proportio, Seſquiquinta, & poſteriori major, Superpartiens duas tertias.

Ca-

CAPUT IX.

De Varietate ac Diſcrimine ELEMENTORUM MATHEMATICORUM.

ABſolutis octo hiſce Capitibus, quibus generaliora illa Muſico Theoretico inprimis ſcitu neceſſaria, recenſita ſunt, haud abs re fuerit, antequam Primo huic Libro finem imponam, pauca quædam adjicere de Στοιχέιοις ſive *Elementis Mathematicorum*. Penitus enim Matheſeos & Muſices ſtudioſo pernoſcendũ eſt, quid ipſis vocentur *Definitiones*, *Poſtulata*, *Axiomata*; quid item *Problemata*, *Theoremata*, *Lemmata*, *Poriſmata* ſive *Corollaria*, &c. ut quibus appellationibus, quicquid eſt *Expoſitionum* aut *Deſcriptionum*, *Canonum*, *Concluſionum & Demonſtrationum Mathematicarum*, inſignitur ac diſcernitur. Commodiſſimè autem hæc ELEMENTA tribui videntur in PRINCIPIA & PROPOSITIONES.

PRINCIPIA, Mathematicis peculiariter ſic dicta, ſunt Triplicia: *Definitiones*, *Poſtulata* & *Axiomata*.

DEFINITIONES, Græcis ὅροι, *à nonnullis quoque &* θέσεις *&* ὑποθέσεις, *i.e. Poſitiones & Suppoſitiones appellatæ, ſunt Principia, quibus explicantur Termini ſive Vocabula Artis*, ne qua nominum ambiguitate aut obſcuritate circumventi παραλογισμὸς incurramus, quomodo *Clavius* & *Rhodius* ajunt. Tales

ſunt:

ſunt: *Punctum eſt, cujus pars nulla eſt.* Euclid. lib. 1. Def. 1. *Linea eſt longitudo latitudinis expers* Def. 2. lib. ejusdem. *Superficies eſt, quæ longitudinem latitudinemq́; tantùm habet.* ibid. Def. 5. *Solidum* ſive *Corpus eſt, quod longitudinem, latitudinem & Craſſitudinem habet.* lib. 11. Def. 1.

POSTVLATA ſive PETITIONES, Græcis Αἰτήματα, *dicuntur, quæ adeò ſunt clara & perſpicua in ſubjecta ſcientia, ut nulla indigeant confirmatione, ſed nudum duntaxat auditoris aſſenſum requirant,* ne in demonſtrando ulla vel hæſitatio, vel difficultas oboriatur. Cujusmodi ſunt: *Poſtuletur, ut à quovis Puncto in quodvis Punctum rectam lineam ducere concedatur.* Euclid. lib. 1. Poſt. 1. *Et rectam lineam terminatam in continuum rectà producere.* ibid. poſt. 2. *Item, quovis Centro & Intervallo Circulum deſcribere.* ibid. Poſtul. 3. Sic etiam: *Poſtuletur, cuilibet Numero poſſe quolibet ſumi æquales vel Multiplices.* lib. 7. Poſt. 1. *Et quolibet Numero ſumi poſſe majorem.* ibid. Poſtul. 2.

AXIOMATA (Ἀξιώματα, *i. e. Dignitates*) *quæ etiam Pronunciata ſive Effata atque Enunciationes dici ſolent, item Communes Notiones vel Notitiæ* κοιναὶ ἔννοιαι, *ſunt, quæ non ſolùm in ſcientia propoſita, ſed omnibus etiam aliis ita manifeſta ſunt & evidentia, ut nemo non ultrò aſſenſum addat, qui tantùm Vocabula intelligit.* Ut: *Totum ſua parte majus eſt.* Euclid. lib. 1. Axiom. 9. *ſi æqualibus æqualia adjecta ſint, tota ſunt æqualia.* ibid. Axiom. 2. *ſi ab æqualibus æqualia ablata ſint, quæ relinquuntur, ſunt æqualia.* ibid. Axiom. 3. *Omnis Numerus ſe ipſum metitur per unitatem.* lib. 7. Axiom. 6.

PRO-

PROPOSITIONES, Græcè Προτάσεις, in genere nuncupantur quæcunque Concluſionum Demonſtrationes, ex principiis illis conſtitutæ ac deductæ. Súntque vel *Principales* vel *minùs Principales*.

Propoſitiones Principales ſunt duplices: *PROBLEMATA & THEOREMATA.*

PROBLEMATA (Προβλήματα, *Latinè Quæſtiones vel Quæſita*) *ſunt* ſecundùm Rhodium, *in quibus ponitur aliquid, quod nondum eſt conſtituendum.* Vel, uti Clavius habet: *Problema eſt Demonſtratio, quæ jubet ac docet aliquid conſtituere.* Ut, ſi quis conetur demonſtrare, ſupra lineam rectam finitam poſſe Triangulum æquilaterum conſtitui, appellabitur hujusmodi demonſtratio; Problema; quoniam docet, qua ratione Triangulum æquilaterum conſtitui debeat ſupra rectam lineam finitam. Quodnam autem ſit diſcrimen inter Problema Dialecticum & Mathematicum, docet idem Clavius 8. Prolegom. in Diſcip. Mathem. ad Euclidis Elementa, his verbis: *In Problemate Dialectico utravis pars contradictionis ſuſcepta confirmatur tantùm probabiliter, ita ut intellectus cujusque ambigat, utranam illius pars vera ſit; in Mathematico verò, quamcunque quis partem elegerit, eam firma demonſtratione, ita ut nihil omnino dubii ſit reliquum, comprobabit. Si enim Geometra ſtatuat ex puncto quolibet lineæ rectæ propoſitæ lineam perpendicularem educere, efficiet utique hoc ipſum ratione conſtanti & evidenti: eodem modo dicendum eſt, ſi ex eodem puncto velit educere lineam non perpendicularem.* Hæc Clavius.

THEOREMATA autem (Θεωρήματα, *Latinè Contemplationes*) *ſunt*, uti inquit Rhodius, *in quibus aliquid vel ineſſe, vel non ineſſe conſtitutæ Quantitati demonſtratur*. Clavius ita: *Theorema appellant eam Demonſtrationem, quæ ſolam pasſionem aliquam proprietatémve unius vel plurium ſimul Quantitatum perſcrutatur*. Ut, ſi quis optet demonſtrare, in omni Triangulo tres angulos eſſe æquales duobus rectis, vocabunt talem demonſtrationem *Theorema*, quia non jubet aut docet Triangulum, aut quippiam aliud conſtruere, ſed contemplatur tantummodò Trianguli cujuslibet conſtituti pasſionem hanc, quód anguli illius duobus ſint rectis æquales. Unde á contemplatione ipſá hæc demonſtratio *Theorema* dicitur.

Adhæc quoque notetur, *Problemata* ac *Theoremata* interdum breviter, interdum operoſé demonſtrari; operoſas autem ejusmodi demonſtrationes tunc *ſex* coſtare & abſolvi *partibus*. *Prima eſt* πρότασις, *qua proponitur datum & quæſitum*; *Secunda*, ἔκθεσις, *qua exponitur datum*; *Tertia*, Διορισμὸς, *quo explicatur quæſitum*; *Quarta*, Κατασκευὴ, *Delineatio, quæ præmittitur Demonſtrationi*; *Quinta*, Ἀπόδειξις, *Demonſtratio*; *Sexta*, Συμπέρασμα, *Concluſio*. Verúm de hiſce plura invenies apud Clavium, Rhodium, Alſtedium, & alios.

Propoſitiones minùs Principales ſunt itidem duæ: LEMMA & PORISMA ſive COROLLARIUM.

LEMMA (Λῆμμα *Lat. Aſſumtio*) *dicitur Propoſitio, quæ tantùm aſſumitur ad Demonſtrationem alicujus Problematis aut*

Theorematis principalis, *ut Demonstratio fiat expeditior aut brevior.* Clavius. Adeóque tum Constructioni, tum Demonstrationi accidit. Rhodio dicitur *Lemma propositio indigens probatione*, *hoc differens â principiis*, *quód hæc nulla indigeant demonstratione; illud autem demonstrari cùm possit, absque demonstratione sumatur, ad aliorum faciendam fidem.*

PORISMA (Πόρισμα, quod Camerarius vertit *Acquisitum*, alii autem *Corollarium*, item *Consectarium* vocant) *est Theorema*, secundúm Rhodium, *quod per se ex demonstrationibus Propositionum sequitur, sine nova ac peculiari demonstratione.*

His omnibus ultimó accedunt & *SCHOLIA*, quæ etiam Propositionibus sæpe adduntur, uberioris declarationis causâ. Quorum æquè, ut *Lemmatum* & *Porismatum* exempla passim sunt obvia in *Elementis Euclideis*, præsertim in Clavii, Rhodii, aliorúmque Commentariis.

Porró hìc quoque notandæ veniunt peculiares quædam, quas Mathematici tradunt, *Principiorum* & *Propositionum* Differentiæ.

I.

Postulata & *Axiomata* hoc habent discriminis, quód, cúm utraque sint per se nota, & indemonstrabilia, *illa* naturam sapiunt problematum, propterea quód aliquid fieri exposcant; *hæc* veró Theoremata imitantur, cúm nihil fieri petant, sed solúm sententiam aliquam notissimam proponant.

II.

Poſtulatum differt à *Problemate*, quód conſtructio Poſtulati non indigeat ulla demonſtratione ; Problematis autem conſtructionem concedat nemo ſine demonſtratione, eó quód difficile aliquod nobis exhibeat conſtruendum.

III.

Idem diſcrimen reperitur inter *Axioma* & *Theorema*: *Illud* enim demonſtrari non debet; *hoc* veró concedendum nulla eſt ratione , niſi demonſtretur. Vide Clavium ad 20. Defin. lib. 1. Euclidis.

IV.

Problema & *Theorema* differunt quatuor potiſſimúm modis: *Primò Enunciatione*. *Problemata* enim efferuntur per Infinitivum: ut, *ſuper data recta linea terminata Triangulum æquilaterum conſtituere*. Eucl. lib. 1. probl. 1. Item: *Ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere*. Ibid. probl. 2. Theoremata veró per Indicativum efferuntur: ut, *ſi Trianguli duo anguli æquales inter ſe fuerint, & ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia inter ſe erunt*. Eucl lib. 1. Theo. 3. Item: *Cùm recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet*. Ibid. Theor. 6.

Secundò differunt *Fine*: quandoquidem *illorum* finis eſt *Conſtructio*; *horum*, *Cognitio*. Vnde etiam Problematum Demonſtrationes his ſolent verbis concludi: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, *quod oportebat facere*, vel, *quod erat faciendum*; Theorema-tum veró hisce : ὅπερ ἔδει δεῖξαι, *quod oportebat ostendere*, vel, *quod ostendendum sive demonstrandum erat*; nisi quando generalis, & omnium Demonstrationum communis usurpatur formula: *quod est vel erat propositum.*

Tertió, *Usu* differunt. Illa quippe *Mechanicis*, hæc *Demonstrationibus* inserviunt.

Quartó, *Accidentibus*, quæ in illis non sunt perpetua, nec perpetuó comitantur sua Subjecta, quia vitiosa potest esse Constructio; in his veró semper sunt eadem.

LIBER SECUNDUS,

De præcipuis iisdemque difficilioribus Principiis quibusdam Arithmeticis in re Musica cognoscendis.

Caput I.

De NUMERO, variísque ejus Speciebus.

NUMERUS *est ex Unitatibus composita Multitudo.* Eucl lib. 7. Def. 2. Ita Binarius, primus Numerus duabus constat Unitatibus; Ternarius tribus; Quaternarius quatuor; &c. Quæ earundem partium ut Unitatum, participatio facit, ut omnes Numeri sint inter se Commensurabiles, quod Magnitudinibus negarum est. Rhodius memorato loco Euclidis. Confer quoque Pachymerium in Aristot. de Insecab. lineis cap. 2. *Vnitas verò est*, (uti Euclides ibidem Def. 1. inquit) *secundùm quam unumquodq; eorum, quæ sunt, Vnum dicitur.* Unde liquet, Unitatem propriè non esse Numerum, sed Numeri duntaxat principium & radicem. Consule etiam de Unitate judicium Viri CL. Petri Laurembergii in Inst. Arithm. cap. 2. lib. 1. Item Zarlinum 1. part. Instit. cap. 12.

Variè autem distinguitur Numerus: ac *Primò*, quidem in *Digitum* & *Articulum*.

Digitus vocatur omnis Numerus Denario minor, quorum cum Vnitate sunt Novem 1.2.3.4.5.6.7.8.9. Hi Numeri sunt Radices ac prima omnium cæterorum Numerorum Elementa; unde & á nonnullis *Alphabetum Arithmeticum* nuncupantur.

Articulus est omnis Numerus, sive duabus, sive pluribus constans notis, qui in decem æquales partes dividi potest: unde semper in sui principio, h.e. dextra parte, cyphram obtinet. Ut, 10.20.30.360.&c. Gemma Frisius in Arithm.

Secundò est Numerus, vel *Par*, vel *Impar*.

Numerus Par dicitur, qui bifariam, i.e. in duas æquas partes dividitur. Euclid. lib. 7. Def. 6. Ut, 4.6.8.10. & similes. *Impar verò* (Eucl. Def. 7.) *qui non bifariam dividitur*, vel, *qui unitate differt à Pari.* Ut, 3.5.7.9. &c. Unde indivisibilem hîc intelligi debere Unitatem constat, aliás quilibet Nu-

Numerus esset Par. Ut, Ternarius haberet dimidium $1\frac{1}{2}$ Unitatem cum semisse. Rhodius ibidem.

Tertiò, Numerus Par & Impar subdividuntur rursus in *Pariter Parem*; *Pariter Imparem*, & *Impariter Imparem*.

Pariter Par Numerus est, (Defin. 8.) *quem Par metitur per Parem.* Ut 24. est Pariter Par, quia 4. Par Numerus eum metitur per 6. itidem Parem Numerum. *Numerus autem Pariter Impar est* (Defin. 9.) *quem Par metitur per Imparem.* Ut, 24. etiam est Pariter Impar, quando 8. illum metitur per 3. Imparem. Adeóque multi sunt Numeri, qui simul sunt & *Pariter Pares*, & *Pariter Impares*. *Impariter Impar denique est* (Defin. 10.) *quem Impar metitur per Imparem.* Ut, 15. metitur 5. per 3; 21. metitur 3. per 7.

Quartò, est Numerus aut *Primus* aut *Compositus*. *Primus vocatur* (Def. 11.) *quem Unitas sola metitur*: vel, *qui à nullo Numero dividi potest, sed tantùm ab Unitate.* Talis est omnis Numerus, qui nec Pariter, nec Impariter Par aut Impar dici potest. Ut, 2. 3. 5. 7. & similes. *Compositus est*, (Def. 13.) *quem Numerus quispiam metitur.* Ita 15. est Compositus Numerus, quia illum & 3. & 5. metiuntur. Ubi notandum, omnes Primos, præter Binarium, esse Compositos. Rhodius d. l. Euclidis. Sunt itaque Numeri Compositi 4. 6. 8. 9. 10. 12 & similes.

Quintò, dicitur alius Numerus *Quadratus*, alius *Cubus* sive *Cubicus*.

Quæ-

Quadratus Numerus eſt, (Defin. 18.) *qui æqualiter eſt æqualis*: vel, *qui ſub duobus æqualibus Numeris continetur*. Hìc intelligitur *Numerus Planus*, cujus Unitates in longum & latum diſpoſitæ perfectum Quadratum Geometricum, ſeu Parallelogrammum rectangulum referunt, cujus longitudo latitudini eſt æqualis, ita ut omnia latera ſint æqualia. Procreatur autem Numerus Quadratus ex cujuslibet Numeri in ſe ipſum ductu, ſive ex Multiplicatione mutua duorum Numerorum æqualium. Ut:

2	3	4	5	25	45
2	3	4	5	25	45
4.	9.	16.	25.	625.	2025.

Vnde Pſellus in Compendio Arithm. hujusmodi Numerum & *Circularem* appellat, quód in ſe ipſum multiplicatus, á ſeipſo incipit, & in ſeipſum deſinit. Alteruter autem Numerorum æqualium, ſub quibus Quadratus Numerus continetur, vel ex quorum Multiplicatione producitur, á Geometris *Latus Quadrati*, ab Arithmeticis *Radix Quadrata* vulgó nnncupatur. *Cubus* ſive *Cubicus Numerus* eſt, (Defin. 19.) *qui æqualiter æqualis æqualiter exiſtit*: vel, *qui ſub tribus æqualibus Numeris continetur*. Atque hìc intelligitur *Solidus Numerus*, cujus Unitates in longum, latum atque profundum diſpoſitæ accuratum referunt *Cubum*, ita ut omnes ejus dimenſiones, nimirum *Longitudo*, *Latitudo* & *Altitudo* ſive *Profunditas*, æquales ſint. Talis reſultat ex Multiplicatione Quadrati per ſuam cujusque Radicem; ſive ex Multiplicatione mutua trium

trium æqualium Numerorum. Quilibet veró trium Numerorum æqualium, ſub quibus Cubus continetur, vel ex quorum mutua Multiplicatione provenit, Geometris *Latus Cubi*, *Arithmeticis Radix Cubica* plerumque dicitur. Quó hìc autem meliús utriusque, & Quadrati, & Cubici Numeri percipias rationem, inſpice hoc Diagramma.

Radices.	2	3	4	5	6	7	8	9	25	45
Quadrati.	4	9	16	25	36	49	64	81	625	2025
Cubi.	8	27	64	125	216	343	512	729	15625	91125

Verúm de hiſce pleniús in calce hujus libri ſecundi tractabitur. Præterea hìc quoque tenendæ ſunt Definitiones 16. & 17. lib 7. Euclidis, de Numeris *Planis* & *Solidis*, quæ ita habent: *Cum duo Numeri mutuo ſeſe multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, Planus appellabitur. Qui veró Numeri mutuo ſeſe multiplicârint, Latera illius dicentur. Cúm veró tres Numeri mutuo ſeſe multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, Solidus appellabitur: Qui autem Numeri mutuo ſeſe multiplicârint, Latera illius dicentur.* Videſis Clavium ad has dictas Definitiones 16. 17. 18. & 19.

Sextò dividitur Numerus in *Perfectum*, *Abundantem* & *Deminutum* ſive *Deficientem*.

Perfectus Numerus eſt (Def. 22.) *qui ſuis ipſius Partibus eſt æqualis.* Hoc eſt, quem omnes ſuæ Partes Aliquotæ ſibi invicem additæ exactè integrant, ita ut nihil aut ſuperſit aut deſit. E.g. Senarius conſtat his partibus Aliquo-

H tis

tis 1.2.3. Unitas quippe eum dividit in ſex partes: Binarius in tres; Ternarius in duas: quæ tres partes ſibi Additæ, integrè reddunt & exæquant Totum ſuum: 3
2
1
—
6.
atque ideo Senarius vocatur Perfectus. Sic etiam 28. eſt Numerus Perfectus, quia præciſè eum reſtituunt & æquant partes aliquotæ 1.2.4.7.14. ſimul ſumtæ. Hujusmodi autem Numeri inventu ſunt rariores, ita usque ad 40000000. hi ſequentes ſolúm dentur: 6.28.496.8128. 130816.2096128.33550336. Ubi ſanè admiratione dignum, omnes Perfectos Numeros incipere vel à Senario, vel ab Octonario; & hoc quidem alternatim, prout ex his datis apparet. Vide Zarlinum 1. Part. Inſt. cap. 13. & Hainlinum in Synopſi Mathematica libro 1. Arithmeticæ Theoreticæ. Porró, qua via ac ratione Perfecti Numeri procreentur, demonſtrat Euclides propoſitione 36. libri 9. *Abundans Numerus dicitur, cujus partes omnes Aliquotæ ſimul acceptæ ipſo Numero ſunt majores.* Vel, (ſecundúm Pſellum in Comp. Arithmetices) *qui ſuis partibus eſt minor.* Hoc eſt, qui adeo multas habet partes Aliquotas, ut eæ ſimul junctæ Totum excedant. V.g. Duodenarius continet Partes 1.2.3.4.& 6. quæ ſibi Additæ conſtituunt 16. qui Numerus Duodenarium, ut Totum, ſuperat quaternario. *Deminutus* ſive *Deficiens contrâ eſt Numerus, cujus partes Aliquotæ ipſo ſunt minores.* Vel, (ſecundúm eundem

Pſel-

Psellum) *qui suis partibus major existit*. Hoc est, qui pauciores habet partes Aliquotas, quám ut ab iis simul acceptis exæquetur. V.C. 14. habet tantúm partes Aliquotas 1. 2. & 7. quæ collectæ Totum non assequuntur, sed conficiunt duntaxat Denarium, numerum Quaternario minorem Toto. Sic Octonarius est Numerus Deminutus, quia partes ejus Aliquotæ 1. 2. & 4. simul sumtæ Septenarium constituunt, quem ille Octonarius Unitate excedit.

Septimò, quando duo aut plures Numeri Relativè considerantur, veluti in proportionibus, alii sunt *inter se Primi*, alii *inter se Compositi*.

Primi inter se Numeri appellantur (Defin 12.) *quos sola Unitas, Communis Mensura, metitur*: Vel, *quos, præter Unitatem, nullus Numerus, tanquam Mensura Communis metitur*. Ut 2. & 3. 9. & 10. 8. & 15. atque his similes. Hîc autem intelliguntur quoque Numeri, qui per se & absolutè considerati, Primi non sunt, modò inter se, i. e. cum aliis Relativè considerati, nullam habeant Communem Mensuram præter Unitatem. Ut, 7. 10. 15. Hoc enim loco 10. & 15. æquè censentur Numeri primi atque 7: verúm duntaxat respectu collationis cum conjuncto Septenario; alioqui enim per se & absolutè considerati, Numeri sunt Compositi.

Compositi inter se nuncupantur, (Defin. 14.) *quos Numerus aliquis*, *Communis Mensura*, *metitur*: Vel, *quos, præter*

Unitatem, *alius quispiam Numerus*, *tanquam Communis Mensura*, *metitur*. Ut hi Numeri 15. & 24. sunt inter se Compositi, quia Ternarius utrumque metitur, tanquam Communis Mensor. Pari autem ratione Compositi inter se dicuntur, qui Relativè considerati deprehenduntur tales, dummodo respectu reliquorum, cum quibus conferuntur, præter unitatem, Communem quandam habeant Mensuram, etiamsi aliás per se Numeri sint Primi. E. g. Dati sunto Numeri 7. 14. 21. Relativé considerandi, inter hos Septenarius uná cum reliquis censetur Numerus Compositus, quód cum istis Communem habeat Mensorem, qui hoc loco itidem est Septenarius; cúm tamen ille per se sumtus sive absolutè consideratus, Primus existat. Utrum veró Numeri sint *inter se Primi* an *Compositi*, indagatur vel *per Divisionem*, vel per *Subtractionem*. *Per Divisionem* hoc modo: Datis duobus Numeris, divide majorem per minorem, & per Residuum semper antecedentem Divisorem, usque dum licuerit: Si Unitas tandem remanserit, Numeri erunt inter se Primi; si veró exacta fuerit divisio, erunt *inter se Compositi*. Quoti autem in hujusmodi Divisione nulla habetur ratio. E. C. 8. & 27. item 3. & 10. sunt Numeri inter se Primi:

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1\\ \cancel{27}(3. & \cancel{8}(2. & \cancel{3}(1. & \cancel{10}(3.\\ \cancel{8} & \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{3}\end{array}$$

Contra 18. & 24. sunt *Compositi inter se*, uti & 3. ac 12.

$$\begin{array}{cc|c} \cancel{6} & & \\ \cancel{24}(1. & \cancel{18}(3. & \cancel{12}(4.\\ \cancel{18} & \cancel{6} & \cancel{3}\end{array}$$

Per

Per Subtractionem (quem modum Euclides tradit lib. 7. Proposit. 1.) ita, ut ſemper minor de majore, alterna detractione, quoties id fieri poteſt, ſubducatur. Quod ſi Unitas tandem remanet, ſunt Numeri inter ſe Primi; ſin autem reliquus Numerus præcedenti ſit æqualis, adeóque illum exactè metitur, ut nihil omnino ſuperſit, Numeri ſunt inter ſe Compoſiti. Ut:

Numeri inter ſe Primi:		*Numeri inter ſe Compoſiti:*	
27	10	24	12
8	3	18	3
—	—	—	—
19	7	6	9
8	3	—	3
—	—	12	—
11	4	6	6
8	3	—	3
—	—	6	—
3	1	—	3
—		0	3
5			—
—			0
3			
—			
2			
—			
1			

Superior autem modus, qui fit per Diviſionem, longè eſt facilior atque expeditior. Atque hæ ſunt præcipuæ Numerorum Species, quarum inprimis notitia Muſico prodeſt.

Caput II.

De ſingulari quorundam Numerorum NATURA ac PROPRIETATE.

I. UNITAS, *Græcè* ΜΟΝΑΣ, *eſt initium & finis omnium Numerorum.* Ex ea enim conſurgunt, inque eandem reſolvuntur omnes Numeri, quamvis ipſa per ſe Numerus non ſit.

II. *BINARIUS, qui eſt Primus Numerus, omnem Numerum Parem metitur.* Unde ſequitur omnes Numeros Pares, per ſe, & inter ſe eſſe Compoſitos, excepto Binario ipſo.

III. *TERNARIUS, qui eſt primus Numerus Figuratus & Trigónus, omnem Numerum metitur, cujus Notæ numerales ſimul collectæ, per Tria exactè dividi poſſunt.* E.c. Numerus 5439. collectis Notis conſtituit Numerum 21. qui dum per 3. diviſibilis eſt, poteſt etiam ipſe datus Numerus 5439. per 3. dividi. 2

5439

3333(1813.

Vocatur quoque *primus Numerus Syſtaticus & Harmonicus*: quòd omnia corpora ſublunaria conſtent ex tribus Principiis hypoſtaticis, nimirum ex *Sale*, *Sulphure & Mercurio*; atque in Harmonia Muſica Princeps Concordantia cernatur in Ternario, quæ *Trias Harmonica* in Muſicis dicitur. Vide Alſtedium lib. 1. adm. Mathem. cap. 5.

IV. *QVATERNARIVS, qui primus est Quadratus, omnem Numerum metitur, cujus duæ primæ Notæ, à dextris numerando, ab ipso Quaternario mensurantur.* Ut, Numeri 69816. duæ primæ Notæ 16. dividi possunt per 4. ergo etiam totus oblatus Numerus. Hoc modo:

16   212
4(4.   69816 (17454.
44444

V. *QVINARIVS, omnem* Numerum *metitur, cujus Prima Nota est* 5. *vel* 0. Quales sunt 4715. 1600. 3430. Ut:

2   1
4715 (943.   1600 (320.   3430 (686.
555   555   555

Hic Numerus *Quinarius* est etiam *primus Centralis*, hac ratione:

VI. *SENARIVS, primus ille Perfectus, omnem* Numerum *Parem metitur, quem Ternarius metitur.* E. g. Quemadmodum Ternarius hunc Numerum Parem 4362. metitur, ita eundem mensurat Senarius. Hoc modo:

111   14
4362 (1454.   4362 (727.
3333   666

Idem

Idem hic Senarius, Numerus etiam appellatur *Mundanus*, quod *Deus* ſex dierum ſpatio Mundum condidit; prætereáque multæ in eo Naturæ & Artium res comprehenduntur. De quo Zarlinus Part. 1. Inſtit cap. 13 & 14.

VII. *SEPTENARIUS vocatur Numerus Sacer; eò quia conſtat è Ternario, qui Numerus DEI dicitur, & Quaternario, qui eſt Numerus Mundi, conſtantis ex quatuor Elementis.* Alſtedius loco jam dicto. Nuncupatur item *Septenarius, Virgineus* ſeu *Virgo*, & *Pallas*. Qua de re Macrobius lib. 1. in Somn. Scip. cap. 6. ita: *Nec te remordeat, quòd cùm* (Μονὰς) *omni Numero præeſſe videatur, in conjunctione præcipué Septenarii prædicetur. Nulli enim aptiùs jungitur Monas incorrupta, quàm Virgini. Huic autem Numero, i.è. Septenario, adeó opinio Virginitatis inolevit, ut Pallas quoque vocitetur. Nam Virgo creditur, quia nullum ex ſe parit Numerum Duplicatus, qui intra Denarium coarctetur, quem primum limitem conſtat eſſe Numerorum. Pallas ideo, quia ex ſolius Monadis fœtu, & Multiplicatione proceſſit: ſicut Minerva ſolo ex uno parente nata perhibetur.* Eodem feré ſenſu etiam ab Antiquis hic Numerus appellatus eſt Ἁγνεία *Caſtitas*, teſte Ariſtide Quintiliano,* *eo quòd ſolus eorum, quæ intra denarium ſunt, nec Geometricé ab aliis generatur, nec alium generat.* Hinc etiam eſt, quód circulus in legitima ſui ſectione Septenarium non admittat, cum tamen in duas, tres, quatuor, quinque, ſex, octo, novem & decem partes exactè ſe dividi patiatur; & in Muſicis Proportionibus

**Lib. 3. mihi pag. 122.*

nibus Septenarius Numerus ad Consonantias vel intervalla Musica gignenda prorsus ineptus sit. Omnes quidem Consonantias simplices numerat, nullas autem gignit, quapropter ex Numerorum Harmonicorum censu plane excluditur. De quo Calvisius 3. Exerc. Mus. pag. 56. & 126. ac Lippius in Synopsi Musicæ novæ.

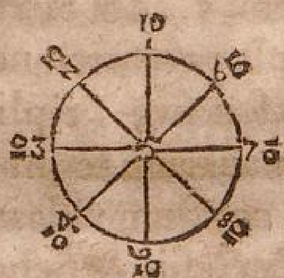
VIII. *OCTONARIUS, qui primus est Cubus, antiquis dictus est* (teste eodem Aristide) *corpus materiâ constans, cùm ex primo Pari, Cubicè multiplicato, constituatur:* quemadmodum *Senarium Corporis perfectionem dixêre, compositum ex primo Impari, & Pari, & Unitate.* Hìc notetur, *in Senario & Octonario omnes Consonantias Musicas Simplices contineri.* Nam 1. ad 2. efformant Octavam; 2. ad 3. Quintam; 3. ad 4. Quartam; 4. ad 5. Tertiam majorem; 5. ad 6. Tertiam minorem; 3. ad 5. Sextam majorem; 5. ad 8. Sextam minorem. Præterea etiam in Octupla proportione, quæ Intervallum constituit Trisdiapason sive Triplicis Octavæ, consistunt ferè vocum humanarum termini naturales, ut quicquid hosce excedit, coactum videatur, & auribus sit ingratum. Unde in Ecclesiis & Scholis hanc Octuplam Proportionem, tanquam Σύστημα τελειότατον in mediocritate situm, raró etiam transilimus. Vide Calvisium 3. Excerc. Mus. pag. 129. & Baryphonum in Pleiad. Mus. pag. 12.

IX. *NOVENARIUM antiquitus appellarunt Numerum Musicum; quód primus ex Numeris tres Consonas Proportiones exhibentibus componatur. Quippe duo & tria & quatuor Novena-*

rium explent. Ariſtides Quintilianus ibidem lib. 3. Intelligit hìc autem inter 2. & 3. Quintam; inter 3. ad 4. Quartam; & inter 2. ad 4. Octavam. *Deinde hic Numerus eſt ſecundus ex Trigono ſive Ternario Quadratus, habetq; illud cum Ternario commune, ut omnem Numerum metiatur, cujus Notas numerales collectas metitur.* E. g. Numeri 4869. notæ collectæ faciunt 27. numerum per 9. diviſibilem, ideo ipſum quoque datum numerum 4869. Novenarius metitur. Hoc pacto:

```
             3
27(3.   4869(541.
 9       999
```

X. *DENARIUS denique eſt primus Numerus Circularis, &* διὰ πάντων; quod hæc Figura oſtendit:



Sunt autem hujus numeri multa Myſteria, quorum quædam etiam in noſtra altera Parte recenſebimus, ad uſum Muſicum eadem tranſlaturi. Interim, qui plura de hoc argumento, i. e. de numerorum vi & efficacia, aut eorum myſteriis requirit, legat *Ariſtidem Quintilianum* lib. 3. de Muſ. *Gellium* lib. 3. cap. 10. *Macrobium* lib. 1. in Somn. Scip. cap.

cap.5. & 6. *Censorinum* de die natal. cap.7. *Psellum* initio Compendii de Arithmetica. *Zarlinum* 1. Part. Inst. cap. 14. & 15. *Hainlinum* in Theorematibus Part. 1. & Axiomatibus partis 2.

Caput III.

De COMMUNI Numerorum inter se Compositorum DIVISORE MAXIMO.

COMMUNIS DIVISOR MAXIMUS, (quem & COMMUNEM MENSURAM MAXIMAM, item MENSOREM COMMUNEM appellant) est Numerus, qui duos pluresve inter se Compositos Numeros exactè dividit, & quo major in tali Divisione dari non potest.

Hujusmodi Communis Divisor Maximus *reperitur ex assiduâ Divisione majoris Numeri per minorem, & antecedentis Divisoris per Residuum, donec tandem aliquod provenit Residuum, quod Divisorem antecedentem exactè tollit.* E.g. Numerorum 8. & 12. Divisor Communis Maximus est 4. quia utrumque illorum metitur. Hoc pacto:

$$\begin{array}{llcll} \overset{4}{\cancel{12}}(1. & \cancel{8}(2. & | & \cancel{8}(2. & \cancel{12}(3. \\ \cancel{8} & \cancel{4} & & \cancel{4} & \cancel{4} \end{array}$$

Dicitur autem M*aximus Divisor*; nam sæpe contingit, ut plures sint Divisores, qui numeros eosdem exactè tollunt. V.g. numerorum 12. & 24. Communes Divisores sunt 2. 3. 4. 6. & 12: sed Maximus eorum est Duodenarius, de quo hîc eſt Quæſtio. Etenim Communis Diviſoris Maximi eſt, numeros inter ſe Compoſitos redigere ad inter ſe Primos ſeu minimos, de qua re Capite quinto; hoc ipſum veró nullus Diviſor Communis præſtat, niſi ſimul ſit maximus. Uti in hoc exemplo apparet:

12 24
2(6. 2(12.
12 24
3(4. 3(8.
12 24
4(3. 4(6.
12 24
6(2. 6(4.
12 24
12(1. 12(2.

Hîc vides, omnes Quotos, putà 6.& 12.4. & 8. 3.& 6.2.& 4. eſſe & manere Compoſitos inter ſe numeros, æquè ac ipſi ſunt Numeri oblati 12. & 24: donec tandem Maximus Diviſor 12. Quotos proferat 1.& 2. Numeros inter ſe Primos & Minimos; licèt quidem utique in omnibus Quotis eadem exſtet Proportio, nempe Dupla.

Quid ſi plures dentur Numeri, quàm duo, confer duorum Maximum Diviſorem cum tertio Numero, & ſic deinceps; atq; ita Maximus collatorum erit illorum omnium Diviſor Communis Maximus.

Exempli ergó, dentur numeri 9.12.15. horum Communis diviſor maximus ſit Ternarius, hoc modo:

3
12(1. 9(3. | 9(3. 12(4.
9 3 3 3

Et quia hic Ternarius ad tertium numerum 15. collatus, eundem pariter exactè tollit, nempe 15 / 3(5. hinc omnium trium datorum numerorum Communis Diviſor Maximus exiſtit.

9 12 15
3(3. 3(4. 3(5.

Sic

Sic Numerorum 16. 12. & 6. Communis Diviſor Maximus eſt Binarius hac Operatione:

4 2

I. ~~16~~ (1. ~~12~~ ~~16~~ ~~12~~ II. ~~6~~ (1. ~~4~~ ~~6~~ ~~4~~ III. ~~16~~ ~~12~~ ~~6~~

~~12~~ ~~4~~ (3. ⁞ ~~4~~ (4. ~~4~~ (3. ~~4~~ ~~2~~ (2. ~~12~~ (3. ~~2~~ (2. ~~2~~ (8. ~~2~~ (6. ~~2~~ (3.

Hîc videre eſt, quód duorum quidem priorum Numerorum 16, & 12, Diviſor Maximus ſit Quaternarius; quando autem tertium quoque Numerum 6. non exactè dividit, ejus loco Binarius, (utpote qui id præſtat) horum trium propoſitorum Numerorum Communis ſit Diviſor Maximus. Alius modus Communem Diviſorem Maximum inveniendi traditur ex Euclide Propos. 2. lib. 7. nempe per Subtractionem. Atque ita datorum Numerorum minor aufertur á majori; & á Reſiduo iterum minor; id quod uſque eó continuatur, quoad ſe offerant duo Numeri æquales. Iſthunc autem modum jam ſuprá Cap. 1. indigitavimus, ubi docuimus, Numeros inter ſe Primos dignoſcere ab inter ſe Compoſitis.

Caput IV.

De COMMUNI Numerorum DIVIDUO MINIMO.

COMMUNIS DIVIDUUS MINIMUS eſt Numerus qui à duobus vel pluribus Numeris exactè dividitur, & quo minor ab iisdem tolli nequit. Invenitur autem hoc modo: I. Si duo Numeri ſunt inter ſe Primi, factus ex ipſorum mutua Multiplicatione est minimus ab utroque Dividuus. Ut, Dividuus minimus á 3. & 5. est 15: á 4. & 5. est 20: á 3. & 10. est 30.

II. Quando autem duo oblati Numeri sunt inter se Compositi, divide alterum Numerum Communem Divisorem Maximum, alterum vero duc in Quotum ex ista Divisione natum, & factus erit Minimus ab utroque Dividuus. Ut, Communis Dividuus Minimus á 4. & 6. est 12. ex hac Operatione:

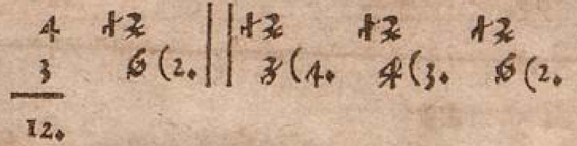
$$\begin{array}{llllllllll} \overset{2}{\cancel{6}}(1. & \cancel{4} & \cancel{4} & 2 & \text{vel} & \cancel{6} & 3 & \cancel{12} & \cancel{12} \\ \cancel{4} & \cancel{2}(2. & \cancel{2} & 6 & & \cancel{2} & 4 & \cancel{4}(3. & \cancel{6}(2. \\ & & & 12. & & & 12. & & \end{array}$$

Sic Minimus Dividuus Communis ab 8. & 12. est 24.

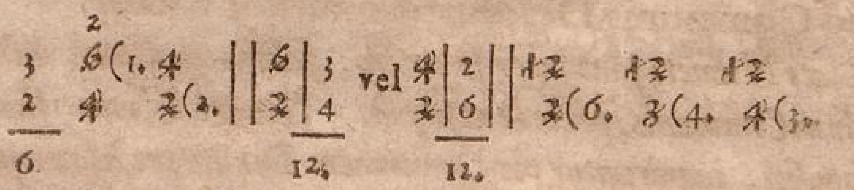
$$\begin{array}{llllllllll} \overset{3}{\cancel{12}}(1. & \cancel{8} & \cancel{8} & 2 & \text{vel} & \cancel{12} & 3 & \cancel{24} & \cancel{24} \\ \cancel{8} & \cancel{4}(2. & \cancel{4} & 12 & & \cancel{4} & 8 & \cancel{8}(3. & \cancel{12}(2. \\ & & & 24. & & & 24. & & \end{array}$$

Eadem via á tribus aut pluribus Numeris investigatur Communis Dividuus Minimus. Primó enim ex duobus prioribus numeris ille inquirendus est, qui repertus, cum proximo Numero confertur, eodem modo, quo antea duo Numeri priores: videlicet per novum Divisorem Maximum alterum Dividendo, & alterum per hujus Quotum multiplicando, si sunt inter se Compositi; sin Primi inter se, repertus Dividuus Minimus tantúm ducitur in numerum proximum. Exemplo sint hi tres Numeri

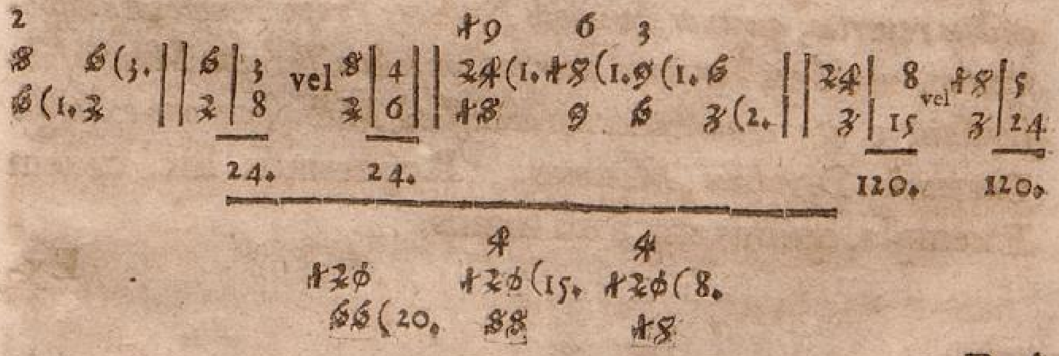
meri 3.4.6. quorum Communis Dividuus Minimus eſt 12. Quippe ex ductu 3. & 4. ceu Numerorum inter ſe Primorum, exſurgit Dividuus Minimus 12: qui Senario, tertio Numero collatus, non minús ab eodem ſe dividi patitur, quám á 3.& 4: quare 12. Communis omnium trium Numerorum habetur Dividuus Minimus.



Sic à 2.3.4. Communis Dividuus Minimus eſt 12. Ex Multiplicatione enim 2.& 3. prodeunt 6, qui Dividuus inventus, cúm non exactè dividatur á 4. alius inveſtigandus: talis igitur ex 6. & 4. tanquam Numeris inter ſe Compoſitis exiſtit 12. Hoc modo:



Item á 6.8.15. eſt Communis Dividuus Minimus 120.



Pari

Pari modo etiam ab hiſce quatuor Numeris 25. 10. 9. 4. Communis Dividuus Minimus reperitur 900. hac Meditatione:

```
                                          5    4    1          12
25        10     | 10 |  2  vel 25 | 5  || 50(5. 9(1. 5(1.50 | 450(112.4
10(2.     5(2.   |  5 | 25       5 | 10 ||  9    8    4     9 | 444       2(2.
                   ------         ----                   ---
                    50.            50.                   450.
```

```
                           12
 1                         38                              12
450 | 225 vel 4 |  2  ||  900(36.900        900          900(225.
222 |   4     2 | 450 ||  288        100(90.999(100.444
       ---         ---     2          1
       900.        900.
```

Apud Euclidem Propos. 36. & 38. lib. 7. docetur Inventio Communis Dividui Minimi hoc pacto:

Si dati Numeri ſunt inter ſe Primi, factus ab illis eſt Minimus Dividuus Communis, perinde ut ſuprà. Si verò Numeri ſunt inter ſe Compoſiti, inquiruntur per Communem Diviſorem Maximum oblatorum Termini inter ſe Primi ſeu Minimi, in eâdem Proportione; quibus repertis, quatuor ejusmodi Numeri Proportionales ita diſponuntur, ut oblatis Terminis inter ſe Compoſitis Termini Minimi ſubjiciantur; atque tum ex horum decuſſatâ Multiplicatioue exſurgit Communis Dividuus Minimus. Repetamus hîc eadem Exempla, quibus antea uſi ſumus.

Ex-

Exempl. I. à 4. & 6.

4 6 Termini Oblati.

✠ (2. Divisor Maxim⁹.

2 3 Termini Minimi.

12. Dividuus Minimus.

Exempl. II. ab 8. & 12.

8 12

✠ (4.

2 3

24.

Exempl. III. à 15. & 20

15 20

✠ (5.

3 4

60.

Exempl. IV. à 3. 4. 6.

12. 6

4 ✠ (2.

3 2 2

12. 12.

Exempl. V. à 2. 3. 4.

6 4

3 ✠ (2.

2 3 2

6. 12.

Exempl. VI. à 6. 8. 15

6 8 24 15.

✠ (2. ✠ (3

3 4 8 5

24. 120.

Exemplum VII. à 25. 10. 9. 4.

25 10 50. 450. 4

✠ (5. 9 ✠ (2.

5 2 450. 225 2

50. 900

Caput V.

De RADICATIONE Terminorum PROPORTIONALIUM.

R*ADICATIO Terminorum Proportionalium est nihil aliud, nisi Reductio Numerorum Proportionalium inter se Compositorum ad inter se Primos seu Minimos.*

Ut enim Primi inter se Numeri sunt Minimi omnium eandem cum eis Proportionem habentium sunt Primi inter se, *secundùm 23. & 24. Propos. lib. 7. Euclidis.* Quare maximum habet usum hujusmodi Reductio in Arithmeticis, ob Commoditates, quæ secum fert, præsertim in

Fractionibus & Proportionibus, ubi Termini inter se Compositi, seu Numeri Majores redigendi sunt ad Terminos Radicales sive Numeros minores, qui & Radices Proportionum dici solent, minimam æquipollentem continentes Formam, *Notationi*, *Numerationi & Computationi* aptissimam. Quippe non solúm faciliús scribuntur & exprimuntur Numeri parvi, quám magni, verúm etiam in Computatione faciliorem & compendiosiorem reddunt Operationem. Unde Solœcismus in Arithmeticis habetur, Fractiones & Proportiones in Terminis inter se Compositis proponere, aut non protinus *Reducere*, sicuti Buscherus ait in sua Arithmetica. *Meditatio* autem ejus ab hac Regula pendet:

Indagatur Communis Divisor Maximus, eo, quem Cap. 3. monstravimus, modo, *qui datos Numeros majores inter se Compositos quotcunq; metiatur sive exactè dividat*; *Quoti erunt Numeri inter se Primi seu Minimi, eandem habentes Proportionem ac Termini dati majores inter se Compositi*, secundúm 35. Propos. lib. 7. Euclidis.

Exempla.

I. Termini Numerales $\frac{40}{45}$. inter se Compositi Radicantur ad $\frac{8}{9}$. Terminos Minimos, per Communem Divisorem Maximum 5. Hoc pacto:

$\cancel{4}5$ $\cancel{4}\cancel{0}$ $|\cancel{4}\cancel{5}$ $|\cancel{4}\cancel{0}$
$\cancel{4}0$ (1. $\cancel{5}$ (8. | $\cancel{5}$ (9. | $\cancel{5}$ (8. Dico igitur, 45. ad 40. & 9. ad 8. unam atque eandem habere Proportionem, nempe Sesquioctavam.

II.

II. $\frac{288}{512}$. Reducuntur per divis. Max. 32. ad $\frac{9}{16}$.

III. $\frac{224}{252}$. per Divis. Max. 28. ad $\frac{8}{9}$.

IV. $\frac{276}{368}$. per Divis. Max. 92. ad $\frac{3}{4}$.

V. $\frac{135}{432}$. per Divis. Max. 27. ad $\frac{5}{16}$.

VI. $\frac{1755}{2925}$. per Divis Max. 585. ad $\frac{3}{5}$.

Sic etiam hi quinque Termini Numerales inter ſe Compoſiti 360. 240. 180. 144. & 120. revocantur per Communem Diviſorem Maximum 12. ad hoſce Terminos inter ſe Primos & Minimos: 30. 20. 15. 12. 10. Hac ratione:

Primúm quæro Comunem Diviſorem Maximum inter duos priores 360. & 240. atque invenio 120. Deinde experior, an hic poſſit quoque tertium illum Numerum 180. metiri; quoniam autem id non præſtat, alius inveſtigandus eſt Diviſor: dúmque adeó per Regulam ſuprá traditam operor, provenit 60. Hunc Numerum 60.

porró exploro, num & quartum metiatur Numerum 144. id quod ſecus deprehendens, alium iterum indago Diviſorem, qui ſit 12. Atque hic Diviſor, cúm etiam quintum illum Numerum 120. tollat, colligitur tandem, 12. eſſe Communē Diviſorem Maximum omnium quinq; Terminorum oblatorum: quibus poſtremó ab hoc Communi Diviſore ſingulatim diviſis, Quotus cujusque pro novo Termino accipiendus. Quocirca ſuprá propoſitorum Terminorum Minimi exiſtunt 30. 20. 15. 12. 10. De hujusmodi Radicum Proportionalium videſis quoque Zarlinum Part. 1. Inſt. cap. 42. & 43. qui & de eodem hoc Exemplo talem Διατύπωσιν ponit, Capite nimirum 43.

360.	240.	180.	144.	120.
120. eſt Numerus major, qui communiter metitur duos primos Terminos majores.				
3	2.			
60. eſt Numerus major, qui metitur tres primos Terminos majores & repertum 120.				
60.	40.	30.		
12. eſt Numerus major, qui metitur omnes propoſitos Terminos atque etiam repertum 60.				
30	20.	15.	12.	10
Numeri inter ſe Primi, qui ſunt Termini Radicales ſupra appoſitorum majorum.				

COMPENDIA RADICATIONIS.

I. *Si oblati Numeri omnes pariter in principio, i.e. dextrâ parte, habeant Ziphras, ſive unam, ſive plures æquales, reſecandæ ſunt illæ, & Notis tantúm ſignificationis operatio perficienda eſt.* Ut, ſi hi quatuor proponantur 360. 240. 180. 120. computantur ut 36. 24. 18. 12. quorum Minimi ſunt 6. 4. 3. 2. per Communem Diviſorem Maximum 6. Radicati. Quinimo nonnunquam hujus Compendii beneficio primo

ſta-

ſtatim intuitu ſcire poſſumus Minimos Terminos absque ulla præmiſſa Diviſoris Communis inquiſitione. Vt, 30.20.10. valent 3.2.1. ſic 120. & 10. idem ſunt quod 12. & 1.

II. *Si in Proportionibus* Numerator *dimidius eſt Denominatoris, non opus erit ulla Radicatione, ſed ſubſtituatur duntaxat* $\frac{1}{2}$. Ut, Termini $\frac{12}{24}$. quando 12. ſunt medietas de 24. idem valent quod $\frac{1}{2}$.

III. *Si uterque Terminus alicujus Proportionis, tam Denomniator, quàm Numerator diviſibilis eſt in duas, tres aut quatuor partes æquales, erunt hæ partes minima ejusdem Proportionis Forma.* E g. $\frac{4}{6}$. idem ſunt quod $\frac{2}{3}$. quia dimidium de 4. ſunt 2. & dimidium de 6. ſunt 3. Sic $\frac{9}{12}$. idem ſunt ac $\frac{3}{4}$: uterque enim Numerus, tam 9. quám 12. dividi poteſt in tres æquales partes: nempe ter tria ſunt 9. & ter quatuor ſunt 12. Ita etiam $\frac{20}{15}$. idem ſunt atque $\frac{4}{3}$. cúm uterque æqualiter ſit diviſibilis per Quinarium.

CAPUT VI.

De ADDITIONE PROPORTIONUM.

HActenus vidimus Proportionum tum *Notationem*, quomodo nimirum ſcribendæ vel ſignandæ ſint; tum etiam *Numerationem*, quæ circa Proportionis cujuslibet explicationem verſatur; ſupereſt earundem *Computatio*, quæ è duabus aut pluribus datis Proportionibus Quæſi-

 tum

tum invenire docet. Quibus omnibus jam dicta Radicatio, quasi παρασκευὴ quædam inservit. Hujus autem quæsiti inventio elicitur his *Quinque* potissimùm *Speciebus*: videlicet ADDITIONE, SUBTRACTIONE, COPULATIONE, MEDIATIONE, & ÆQUIPARATIONE. Quas singulas brevi atque expedito modo, facillimóque Compendio in quinque subsequentibus Capitibus condocefaciam. Et sicut *Notatio* ac *Numeratio* Proportionum Fractos Numeros imitatur, ita etiam earum *Computatio* ab iisdem mutuatur quædam, uti ex sequentibus patebit.

Prima ergo Proportionum *Affectio* seu *Species ADDITIO*, *est Computatio*, *qua duæ pluresve Proportiones in unam colliguntur Summam.*

Hæc Computationis Species planè congruit cum Multiplicatione Fractionum Simplicium sive Purarum in Arithmeticis. Additurus itaque Proportiones, dispone eas primùm ita, ut unusquisque Denominator suo subscribatur Numeratori. Dehinc Operatio hoc pacto absolvitur.

Multiplica inter se & Numeratores, & Denominatores, prodibunt Termini novæ istius Proportionis, quæ ex propositis constituitur. V.g. Si scire lubet, quænam Proportio exsurgat ex Additione Sesquialterius & Sesquitertiæ, quarum Termini sunt $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. Duc 2. in 3. & provenit 6. producti Numerator: similiter quoque 3. in 4. & oritur 12. Denominominator producti. Hoc modo : $\begin{matrix} 2 - 3 \\ 3 - 4 \end{matrix} \Big| \frac{6}{12}$. Eſt igitur ſumma hujusmodi duarum Proportionum $\frac{6}{12}$. Dupla proportio, in Terminis Minimis ſive Radicalibus $\frac{1}{2}$. Unde colligitur, ſi Sesquitertia Sesqui alteri, vel contrariè, Sesquialtera Sesquitertiæ addatur , Duplam oriri proportionem. Sic conjunge Sesquiquartam cum Sesquiquinta decima, naſcetur Sesquitertia. Hoc pacto: $\begin{matrix} 4 - 15 \\ 5 - 16 \end{matrix} \Big| \begin{matrix} 60 \\ 80 \end{matrix}$. in Terminis Minimis $\frac{5}{4}$.

Quod ſi verò duabus plures ſint Addendæ Proportiones, priùs itidem multiplica duos Numeratores inter ſe, Productum in proximum Numeratorem, & ſic ulterius ad finem usque, atque habebis Numeratorem Producti. Deinceps eodem quoque modo age cum Denominatoribus, & accipies Producti Denominatorem. Cujusmodi *plurium Proportionum Additionem* nonnulli *Multiplicationem* earundem appellitant, ut *Laurembergius* in Inſt. Arithm. lib. 3. Propos. 5. Confer quoque Zarlinum 1. Inſt. part. cap. 31. Hujus Exemplum eſto tale:

Scire aveo , quænam Proportio reſultet ex Additione Sesquialterius, Sesquitertiæ, Sesquiquartæ & Sesquiquintæ ; quarum Termini Radicales hac ſerie collocantur $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{5}{6}$. Multiplico primùm duos priores Numeratores inter ſe , & exſurgunt 6 : hoc Numero iterum Multiplicato per 4. prodeunt 24 : qui Numerus porró Multiplicatus cum ſequente 5. efficit 120. Numeratorem Producti. Ad eundem planè modum jam quoque Multiplico Denominatores inter ſeſe, provenit 12: de-

inde

inde hunc iterum cum 5. venit 60. qui postremó per 6. Multiplicatus, reddit 360. ejusdem Producti Denominatorem. Suntque adeó hîc duo novi Termini $\frac{120}{360}$. Proportionem obtinentes Triplam, in Numeris Minimis $\frac{1}{3}$.

6	24		
2—3	4	5	120
3—4	5	6	360.
12.	60.		

Sic etiam si Addendæ forent tres Sesquialteræ Proportiones, $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{3}$.

4		
2—2	2	8
3—3	3	27.
9		

Quare ex Additione trium Sesquialterarum Proportionum emergit Proportio Tripla Superpartiens tres Octavas:

$$\begin{array}{l} 3 \\ \cancel{27}(3\tfrac{3}{8}. \\ \cancel{8} \end{array}$$

CAPUT

Caput VII.

De SUBTRACTIONE Proportionum.

SVBTRACTIO eſt Computatio, quâ Proportio minor à majori ſubducitur, ut habeatur Reliqua, quæ earum Differentia eſt.

Et hæc convenit cum Diviſione Fractionum Arithmeticarum. Terminorum igitur Diſpoſitio hîc eadem prorſus eſt atque in Additione, niſi quód in Subtractione major proportio ſemper antecedere debeat, quod in Additione non attenditur.

Operatio autem inſtituitur per Multiplicationem decuſſatam. Atque ita prioris Proportionis Numerator ductus in Denominatorem poſterioris, efficit Reſidui ſive Differentiæ Numeratorem; & contrà Numerator poſterioris Proportionis in Denominatorem prioris ductus ejusdem Reſidui conſtituit Denominatorem. Exemplum eſto Sesquitertia à Sesquialtera ſubtrahenda.

2		3	8
	✠		
3		4	9.

Eſt ergo Reſiduum ſive Exceſſus Sesquialterius poſt ſubtractam Sesquitertiam, Sesquioctava.

Sic demta Sesquioctava á Sesqui quinta, remanet Sesquinona.

4		8	36		
	✠			in Terminis Minimis	9
5		9	40		10.

Si plures occurant Proportiones ſubtrahendæ, colligito priùs eas omnes per Additionem in unam Summam, ac tum demum fiat iſtius *summæ subductio á Proportione majore decussatim, prout Regula jubet.* V.g. Sint tres Sesquioctavæ subducendæ á Sesquialtera, quarum Termini ita collocentur $\frac{8}{9}. \frac{8}{9}. \frac{8}{9}.$ Multiplica initio duos priores Numeratores inter se, & proveniunt 64. quæ iterum per 8. Multiplicata, efficiunt 512. Dehinc etiam Denominatores duo priores ita Multiplicati dant 81. ex quibus porró Multiplicatis cum 9. resultant 729. Sunt igitur novi Termini $\frac{512}{729}.$ qui decussatim á $\frac{2}{3}.$ subtracti relinquunt Numeros $\frac{1458}{1536}.$ & per communem Divisorem Maximum 6. ad Terminos Radicales reducti $\frac{243}{256}.$ Proportionem obtinentes Superpartientem tredecim ducentesimas quadragesimas tertias.

64							
8—8	8	512	2	512	1458		243
			✠			in Terminis Minimis	
9—9	9	729.	3	729	1536		256.
81							

Alium subtrahendi modum exhibet *Zarlinus* 1. Part. Inst. cap. 34. qui tamen ab hoc nostro non est diversus, nisi in Dispositione Terminorum: *ubi nempe utriusq; Proportionis tum Numeratores, tum Denominatores supponuntur sibi invicem, & Differentia non ad latus scribitur, sed infra subjectam lineolam.* Meditatio autem est una & eadem. Ut, quando subtrahenda est Sesquitertia á Sesquialtera, Termini hoc modo disponuntur:

Sesquialtera	3	2	
	✠		
Sesquitertia	4	3	
	9.	8	Sesquioctava.

CAPUT VIII.

De Proportionum COPULATIONE ſive MULTIPLICATIONE.

COPULATIO Proportionum eſt Computatio, quâ duæ aut plures Proportiones ita inter ſe connectuntur, ut proximè antecedentis Proportionis Numerator ſemper etiam ſit immediatè ſequentis Denominator; maximus autem earum Terminus omnino omnium reliquorum Terminorum Denominator ſit Communis.

Et quoniam in tali Proportionum connexione diverſi Denominatores ad unum eundémque revocantur, ideó hæc Computandi ratio Regulis ut plurimum innititur de Fractionum Reductione ad eandem Denominationem. Ac proinde, ſicut alii Arithmetici hujusmodi Reductionem ſola Multiplicatione perſiciunt, alii veró & Multiplicatione & Diviſione ſimul; item in Proportionum doctrina hoc Artificium variè inſtitui poteſt: quod igitur triplici modo hîc proponam.

I.

Prima Copulandi ratio eſt, quæ ſola Multiplicatione conſiſtit, qualem Zarlinus tradit 1. part. Inſt. cap. 31. & 32: unde ipſam hanc Proportionum Computationem *Multiplicationem* appellat, his eam verbis definiens: *II. Moltiplicare è una Diſpoſitione di più Proportioni in un continoulato ordine poſtel' una dopol' altra in tal modo, che il minor Termine dell' una ſia il maggior* *altra, & coſi per il contrario.* Hoc eſt, *Multiplicatio eſt Diſpoſitio plurium Proportionum, ex continuato quodam ordine ſic collocatarum, ut minor Terminus unius ſit major alterius, & contrà.* Methodus hæc eſt:

Primò, duarum oblatarum Proportionum Denominatores inter ſe Multiplicantur, quemadmodum fit in Additione, & provenit novus Denominator prioris Proportionis: deinde, ut ejusdem quoque invenias Numeratorem, ducitur Numerator prioris Proportionis in Denominatorem alterius; pro ſecundæ autem Proportionis Numeratore aſſequendo, ambo ipſi datarum Proportionum Numeratores in ſe ducuntur. E. g. Copuletur Seſquialtera & Seſquitertia, tres gignuntur novi Termini 12.8.&6: qui per 18. Propos. lib.7. Euclidis eaſdem retinent Proportiones, quæ in Terminis Multiplicantibus fuerunt. Verùm, quia hi Termini geniti Numeri ſunt inter ſe Compoſiti, Radicandi ſunt ad Terminos inter ſe primos & minimos; quibus denique propria cujusque Proportionis Forma ſubſcribatur. Ut:

2—3
3—4
____
12. 8. 6.
In Term. Min.
6. 4. 3.
2. 3.
3 4

Atque adeò hîc vides, duas datas Proportiones in tribus jam conſiſtere Terminis, quorum medius, cùm bis ſumatur, prioris Proportionis eſt Numerator, & ſimul poſterioris Denominator.

Quòd ſi plures duabus ſint Proportiones, eodem inchoatur modo, qui jam eſt oſtenſus. Dein Multiplicatur Denominator tertiæ Proportionis in ſingulos anteà Copulatos Terminos; Numerator verò

ejus-

ejusdem in postremum duntaxat talium Terminorum. Atque eadem hæc Praxis in reliquis continuatur. E. C. Dantur Copulandæ Proportiones Sesquialtera, Sesquitertia, Sesquiquarta & Sesquiquinta, quæ in Terminis Minimis sive Radicalibus positæ hoc ordine se excipiant $\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5}.\frac{5}{6}$. Multiplica primùm inter se Denominatores duarum priorum Proportionum, qui hîc sunt 3. & 4. prodeunt 12. Deinde Numeratorem primæ Proportionis (2.) in Denominatorem secundæ (4.) & proveniunt 8. Tum ambos Numeratores (2. & 3.) inter sese, exsurgunt 6. quos tres Numeros proximæ lineæ subscribas. Jam, ut sequentes quoque Proportiones his annectas, Multiplica tertiæ Proportionis Denominatorem (5.) per singulos jam Copulatos Terminos 12. 8. 6. sub prima linea; item Numeratorem ejusdem Proportionis (4.) in postremum Copulatorum Terminorum (6.) & nascentur quatuor novi Termini Copulati, puta 60. 40. 30. 24: quos infra alteram lineam ordine scribas. Tandem eodem modo duæ ultimæ Proportionis Denominatorem (6.) in singulos hos quatuor Numeros, & Numeratorem ultimum (5.) in ultimum eorundem Numerorum (24.) nanciscetis omnium quatuor oblatarum Proportionum novos Terminos, videlicet 360. 240. 180. 144. 120. Qui quinque Termini Copulati, cúm Numeri sint inter se Compositi, per Communem Divisorem Maximum, qui hoc loco est 12, Radicandi sunt ad Minimos seu inter se

Primos 30. 20. 15. 12. 10: quomodo hujus ipſius Exempli Radicationem ſuprá Cap. 5. docuimus.

Διατύπωσις.

2—3 | 4. 5. Proportiones Copulandæ.
3—4 | 5 6

12. 8. 6.

60. 40. 30. 24.

360. 240. 180. 144. 120. Proportiones Copulatæ.

In Term. Minimis

30. 20. 15. 12. 10.

$\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{5}{6}$.

In hac Proportionum Copulatarum ſerie itidem obſervabis, quomodo alia ex alia nectantur, ac proinde Numerator Termini antecedentis jugiter quoque ſimul ſit Denominator ſequentis.

Quin etiam itidem hic Modus contrariâ ac retrogradâ operatione abſolvitur, ſicut itidem *Zarlinus* docet cap. 32. dicti libri. Sumamus idem jam propoſitum Exemplum.

Duc primó Numeratores duarum ultimarum Proportionum in ſeſe (4. & 5.) reſultat 20. Deinceps Numeratorem penultimum (4.) in Denominatorem ultimum (6.) oriuntur 24. Poſtea ambos Denominatores (5. & 6.) emergunt 30. Hos tres Numeros colloca ſub prima linea. Porró duc ſequentis antepenultimæ Proportionis Numeratorem (3.) in ſingulos hoſce Numeros 30. 24. 20. ut & Denominatorem in maximum horum

Ter-

Terminorum (30.) prodeunt Numeri 120.90.72.60. ſub linea ſecunda notandi. Poſtremò Multiplica rurſus per primum Numeratorem (2.) ſingulos hoſce Terminos 120.90.72.60. uti & maximum eorúndē (120.) per Denominatorem primum, & adipiſceris Terminos Copulatos 360.240.180.144.120.

Διατύπωσις.

Proportiones Copulandæ	$\frac{2.}{3}$	$\frac{3.}{4}$	$\frac{4.}{5}$	$\frac{5}{6}$	
		30.	24.	20.	
	120.	90.	72.	60.	
Proportiones Copulatæ.	360.	240.	180.	144.	120
	In Numeris Minimis				
	30.	20.	15.	12.	10.
	$\frac{2.}{3}$	$\frac{3.}{4}$	$\frac{4.}{5}$	$\frac{5.}{6}$	

II.

Secundus modus Copulandi hoc Canone gubernatur:

Primò inquiritur Communis Dividuus Minimus ex datis Denominatoribus, qui, ut Communis fit Denominator, ſic etiam primæ oblatæ Proportionis eſt Denominator novus. Dehinc pro Numeratore ejusdem novo, Divide rurſus hunc jam inventum Denominatorem novum per iſtius Proportionis proprium ac Radicalem Denominatorem; Quotum Multiplica per ejusdem Radicalem Numeratorem, & Productum Numerator erit quæſitus. Porrò, quia hic repertus Numerator ſimul etiam Denominator eſt ſequentis Proportionis, Divide hunc iterum per ſecundæ Proportionis Denominatorem; Quotum duc in Numeratorem ejusdem, & accipies tertium Numerum,

ſecun-

ſecundæ Proportionis Numeratorem novum , uti & tertiæ , ſi qua ſequitur, Denominatorem, Et ſic deinceps. E.g.

Copulaturus Sesquialteram & Sesquitertiam, primó ex mutua Multiplicatione Denominatorum 3. & 4. invenies 12. Dividuum Minimum & Denominatorem novum primæ Proportionis. Jam Divide eundem hunc Denominatorem novum 12. per Radicalem Denominatorem (3.) Quotus erit 4. qui cum primo Numeratore (2.) Multiplicatus dat 8. primæ Proportionis novum Numeratorem. Poſtremó Dividatur iterum hic novus Numerator 8. tanquam Proportionis ſubſequentis novus Denominator, per 4. Radicalem Denominatorem ſecundæ Proportionis, Quotus eſt 2. quem duc in ejusdem Numeratorem (3.) producetur 6. ſecundæ Proportionis Numerator novus. Atque adeó emergent hi tres Termini 12. 8. 6. qui, ut antè dictum, per Communem *D*iviſorem Maximum 2. Radicandi ſunt ad 6. 4. 3.

4	12	4	8	2
3	3	2	4	3
12.		8.		6.

Διατύπωσις.

2	3		8	9	
3	4	ſic:	9	10	
12. 8. 6.			90. 80. 72.		
Hoc eſt			In Ter. Min.		
6. 4. 3.			per 2. Radic.		
2.	3.		45. 40. 36.		
3	4		8.	9.	
			9.	10.	

In pluribus Proportionibus hic planè eadem eſt ratio. Ut in Exemplo ſuperiús allato $\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5}.\frac{5}{6}.$ *D*enominatorum Minimus

mus Dividuus & Communis Denominator eſt 60. Hunc Divide per primum Denominatorem (3.) Quotum (20.) Multiplica per primum Numeratorem (2.) & habebis novum etiam Numeratorem 40. Deinceps Numerum iſtum 40. rurſus Divide per ſecundum Denominatorem (4.) Quotum 10. duc in Numeratorem ſecundum (3.) exſurgit 30. tertius Numerus & ſecundus novus Numerator. Porró Divide 30. per 5. tertiæ Proportionis Denominatorem Radicalem; Quotum (6.) Multiplica per 4. ejusdem Numeratorem Radicalem, proveniunt 24. Tandem 24. Dividatur á 6. ultimæ Proportionis Denominatore Radicali; Quotum (4.) Multiplica cum 5. Radicali ejusdem Numeratore, producuntur 20.

Διατύπωσις.

4 3 12.	12 5 60.	60 66 (10.	60 33	20 2 40.	40 44	10 3 30.	30 5	6 4 24.	24 6	4 5 20.

$\frac{2.}{3}$ $\frac{3.}{4}$ $\frac{4.}{5}$ $\frac{5.}{6}$

60. 40. 30. 24. 20.

In Term. Min. per 2. Radicatis

30. 20. 15. 12. 10.

$\frac{2.}{3}$ $\frac{3.}{4}$ $\frac{4.}{5}$ $\frac{5.}{6}$

Sic: $\frac{8.}{9}$ $\frac{9.}{10}$ $\frac{15.}{16}$ $\frac{8.}{9}$ $\frac{9.}{10}$ $\frac{8.}{9}$ $\frac{15.}{16}$ i.e. Sesquioctava, Sesquinona, Sesquidecimaquinta, &c.

720. 640. 576. 540. 480. 432. 384. 360.

In Term. Min. per 4. Radicatis

180. 160. 144. 135. 120. 150. 96. 50.

$\frac{8}{9}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{15}{16}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{15}{19}$

III.

Quanquam veró isti duo hactenus traditi Modi per se satis expediti sunt, tamen, quia ipsa Operatione peracta semper ferè Numeros relinquunt inter se Compositos, Radicatione adhuc indigentes, quæ quidem in pluribus Proportionibus, iisque maximis interdum Numeris expressis, (sicut præsertim in primo illo Modo Zarliniano accidit) operosior existit; *tertium* tibi hìc *Modum* delineatum dabo, quo Proportiones uná eadémque operá & Copulantur, & simul in ipsis Minimis statim exhibentur Terminis, nulli Radicationi obnoxiis. Methodus ejus est talis.

Primùm Adduntur datæ Proportiones sibi invicem, summáque earum actu tum Radicatur ad veram sive Radicalem Formam, quæ in locum secundæ Proportionis substituitur. Quód si tum plures offerantur Proportiones, hæc nova jam inventa secundæ Proportionis Forma Additur iterum tertiæ Proportionis Terminis, ac similiter hujus Forma Radicalis in locum tertiæ istius Proportionis subrogatur; quæ Praxis *toties iteranda, usque dum ad finem perventum fuerit.* Atque ita oblatarum Proportionum Termini apti redditi sunt ad procreandum *Communem* quendam *Denominatorem*, qui postea cum Numeratoribus suis omnibus ac singulis, in ipsis Minimis sive inter se Primis Numeris constitutus deprehenditur. *Formis itaque singularum datarum Proportionum Radicalibus ex justo ordine collocatis, quæritur ab omnibus istis Denominatoribus (sicuti in proximé præcedenti Modo) Communis*

Divi-

Dividuus Minimus, is fit Communis Denominator. Quo reperto, operor, uti legis est in Fractionum Reductione, nempe Communem hunc Denominatorem rursus per cujusque Proportionis proprium ac Radicalem Denominatorem Dividendo, & Quotum per ejusdem Numeratorem Multiplicando, Factus sive Productum exhibebit novum sive quæsitum Numeratorem. *Vel*, quod idem est, *Ducuntur singuli Numeratores in Denominatorem Communem, Productum Dividitur per Denominatores singularum Proportionum, ac tum Quoti ostendent Numeratores optatos.*

Exemplum duarum Proportionum.

Sit Copulanda Proportio Sesquialtera cum Sesquitertia in Terminis $\frac{2}{3}.\frac{3}{4}$. Adde sive Multiplica priús Denominatores 3. & 4. fiunt 12. Item Numeratores 2. & 3. exsurgunt 6: qui duo Facti 12. & 6. constituunt Proportionem Duplam in Terminis Minimis $\frac{1}{2}$. Atque adeó hæ duæ Proportiones ad Copulationem præparatæ hoc pacto proponendæ sunt $\frac{2}{3}.\frac{1}{2}$. Jam investigo Communem Dividuum Minimum seu Communem Denominatorem, qui hìc est Senarius, illum scribo infra ductam lineolam primo loco: deinde hunc 6. iterum Divido per Denominatorem prioris Proportionis (3.) Quotus existit 2, qui ductus in ejusdem Numeratorem (2.) prodit 4, qui primus novus est Numerator. Tum pariter Divido eundem Communem Denominatorem per Denominatorem Radicalem posterioris Proportionis (2.) Quotus est 3: quo ducto in 1. secundus Numerator fit 3. Atq; ita hæ duæ

Proportiones Copulatæ repræſentantur, prætereáque inTerminis ſuis inter ſePrimis & Minimis, ut nulla prorſus Radicatione hîc opus ſit. Etſi autem Termini in hoc *Tertio Modo* aliter proponuntur, quám in duobus præcedentibus, tamen nihilominus idem hîc manet Proportionum nexus: nempe, quia Copulandæ erant Sesquialtera & Sesquitertia, 6. & 4. continent Sesquialteram; 4. & 3. Sesquitertiam: quæ autem duæ proportiones conjunctæ, conſtituunt Duplam, quam Numeri extremi ceu Summam ex illis collectam exhibent. Porró, quemadmodum hìc 6. eſt Denominator Sesquialterius, ſic 4. eſt & hujus Numerator, & ſequentis Sesquitertiæ Denominator; utriusque autem Denominator Communis eſt 6. uti ex hac Διατυπώσει videas.

3 | 6 | 2 6 | 3 || 2 1   2 3
2 | 3 | 2 3 | 1 || 3 2 vel 3 4
6. | | 4. | 3. || 6. 4. 3.   6. 4. 3.
2 3   3. 2.—
3. 4.   2.— 1.

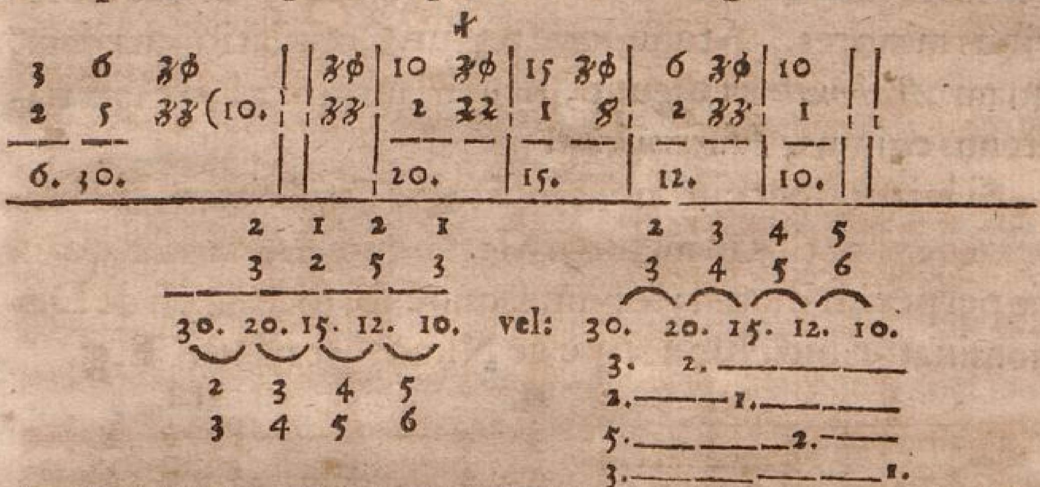
Sic $\frac{4}{3}.\frac{6}{5}$. i.e. Sesquitertia & Sesquiquinta hoc modo Copulantur.

3 5   3 5
4 8 vel: 4 6
8. 6. 5.   8. 6. 5.
3 5   4. 3.—
4 6   8. —5.

Ex-

Exemplum plurium Proportionum.

Sint Copulandæ ſuprá memoratæ quatuor Proportiones $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}$. i e. Sesquialtera, Sesquitertia, Sequiquarta & Sesquiquinta; redige eas priús in Formas, uti antea edoctum, & proponentur iſtæ Proportiones hoc modo: $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}$. *Q*uære Minimum á Denominatoribus Dividuum, qui hoc loco eſt 30. Is rurſus, tanquam Communis Denominator á datarum Proportionum Denominatoribus Radicalibus Dividatur; Quoti per Numeratores Radicales Multiplicati novos oſtendent Numeratores: quod ex ſequenti operatione & Diagrammate conſtat.



Sic etiam $\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}$. i.e. Sesquioctava, Sesquinona, Sesquiquinta decima, &c. quarum Denominator Communis eſt 180. Copulantur hoc modo:

$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$	
180	160	144	135	120	180	96	90
$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{15}{16}$	

Vel: $\frac{8}{9}$

180. 160. 144. 135. 120. 180 96. 90

9. 8. ———————————
5. —— 4. ———————————
4. ———— 3. ———————
3. ———————— 2. ————
5. —————————— 3. ——
15. ———————————— 8. —
2. ————————————— 1.

Et tantum quoque de Tertio Modo.

Præterea autem ſolent Muſici etiam interdum ſonis acutioribus attribuere Numeros majores, & gravioribus minores. Atque inde oritur Copulatio quædam, quam *Arithmeticam* dicunt, ſicut illam contrá, de qua hactenus egimus, *Harmonicam*.

Si igitur libet ejusmodi inſtituere *Copulationem Arithmeticam*, revoca tibi in mentem Methodum *Harmonicæ*, quam ſic perperam dicunt; & omne, quod ibi dictum eſt de Denominatoribus, hìc accipe de Numeratoribus. E.g.

I.	II.	III.
2—3 | 4 3—4 | 5	2 3 4 3 4 5	2 1 2 3 2 5
6. 9. 12.	12. 18. 24. 30.	2. 3. 4. 5.
24. 36. 48. 60. per 12. Radicati 2. 3. 4. 5.	per 6. Radicati 2. 3. 4. 5.	

Verúm, quid Muſicis hæc Copulandi ratio proſit, equidem non video, ut eam potiús uná cum aliis inutilibus

bus planè resecandam censuerim, saltem confusionis evitandæ gratiá. Primó enim vim quandam facit Reductionis legibus Arithmeticis, siquidem hoc modo Proportionum Termini non revocantur ad eundem Denominatorem, sed ad Numeratorem talem. Adhæc sonus gravior naturá continet mensuram & Numerum majorem; acutior veró minorem: id quod in Parte Speciali abundè demonstrabimus.

Caput IX.

De MEDIATIONE seu DIVISIONE Proportionum.

MEDIATIO Proportionum est Computatio, qua Medietas alicujus Proportionis invenitur.

Et quia sic Medius ille Terminus bis sumtus duas semper constituit Proportiones, quarum considerata Habitudo, uti superius dictum, Proportionalitas nuncupatur, hinc pro triplici illo usitatiorum Proportionalitatum discrimine, Mediatio Proportionum triplex quoque emergit, nempe Arithmetica, Geometrica & Harmonica.

ARITHMETICA MEDIATIO est, ubi Medius Terminus inventus extremis collatis Proportionalitatem efficit Arithmeticam, hoc est, æquales utrinque Differentias, Proportiones veró inæquales. Atque ibi in Musicis minor Proportio semper præcedit majorem.

Ope-

Operandi modus hic eſt:

Termini Proportionis oblatæ colliguntur per vulgarem Additionem, atque ſi totus inventus Numerus par eſt, ſumitur Dimidium ejus pro Medietate iſtius Proportionis. E.g. Tripla Proportio $\frac{3}{1}$. in duas partes Arithmeticè diviſa, conſtituit Binarium pro medio Termino. Ac tum utriusque æqualem refert Differentiam, Unitatem nimirum; Proportiones autem inæquales: prior enim eſt 3. ad 2. Sesquialtera; poſterior 2. ad 1. Dupla.

Διατύπωσις.

4.	Totus.
3. —— 1.	Termini Mediandi.
2.	Medietas.
1. 1.	Differentiæ æquales.
3. 2. 1.	Termini Mediati.
$1\frac{1}{2}$. 2.	Proportiones inæquales.

Sic Proportio Superpartiens duas tertias $\frac{5}{3}$. Dividitur hoc modo:

8.	Totus.
5. —— 3.	Termini Mediandi.
4.	Medietas
1. 1.	Differentiæ æquales.
5. 4. 3.	Termini Mediati.
$1\frac{1}{4}$. $1\frac{1}{3}$.	Proportiones inæquales.

Quando veró ex Terminorum Collectione Numerus impar exiſtit, Totus ipſe ſimul eſt Medium; ſed tum pro

pro Extremis Termini Proportionales sunt duplicandi. Ut, Medietas Arithmetica Duplæ Proportionis est Ternarius, hoc pacto:

3. Totus & simul Medietas.
2 —— 1. Termini Mediandi.
4 2. Termini Duplicati.

1. 1. Differentiæ æquales.
4. 3. 2. Termini Mediati.
$1\frac{1}{3}$ $1\frac{1}{2}$ Proportiones inæquales.

Ita Sesquialterius Medium Arithmeticum est Quinarius.

5. Totus & Medietas.
3. —— 2. Termini Mediandi.
6. 4. Termini Duplicati.

1. 1. Differentiæ æquales.
6. 5. 4. Termini Mediati.
$1\frac{1}{5}$. $1\frac{1}{4}$. Proportiones inæquales.

GEOMETRICA MEDIATIO dicitur, cúm Medietas Terminorum refert Proportionalitatem Geometricam, id est, æquales Proportiones, Differentias veró inæquales; ita tamen, ut hæ eandem obtineant Proportionem, quam Medius ad extremos Terminos.

Habétque locum hæc Mediatio non nisi in Proportionibus multiplicibus, iisque, quarum minor Terminus est Unitas; major veró aut Numerus, Quadratus aut Cubicus: atque adeó illas in duas, has in tres secat Partes sive Proportiones æquales. Quare & ipsa Operatio ejus ab Analyſi Numeri Quadrati & Cubici, ſeu (ut vulgó loquimur) Extractione Radicis Quadratæ & Cubicæ, aliquomodo dependet. Si ergo major Terminus eſt Numerus Quadratus, Multiplica datæ Proportionis Terminos inter ſe, Radix producti erit Proportionis illius Medietas Geometrica. Exemplo ſit Proportio Quadrupla in Terminis 4. ad 1. Hujus termini ſe mutuó Multiplicantes reddunt 4. cujus Radix, nempe Binarius, exhibet hujus proportionis Medium Geometricum. Hoc modo:

4. Numerus Quadratus.
4.——1. Termini Mediandi.
2. Medietas & Radix.

---

2. 2. Proportiones æquales.
4. 2. 1. Termini Mediati.
2. 1. Differentiæ inæquales.
2. Proportio Differentiarum.

Hic Medius Terminus, videlicet Binarius, facit utrinque æquales Proportiones: cum Quaternario enim collatus Proportionem habet Duplam; cum Unitate, itidem: Differentias autem reddit inæquales, dum á Quaternario differt Binario; ab Unitate veró duntaxat Unitate. Deinde hæ ipſæ Differentiæ 2. & 1. eadem inter ſe conſtant Proportione, qua Terminus medius cum utroque ſuo extremo comparatus, nimirum Dupla.

Sic

Sic $\frac{1}{9}$. Proportionis Noncuplæ Medium Geometricum est Ternarius: Sedecuplæ $\frac{1}{16}$. est Quaternarius: & sic deinceps in reliquis, quemadmodum id ex tabula Radicum & Quadratorum manifestum est.

Quód si veró major Terminus Numerus fuerit Cubicus, dividitur istiusmodi Proportio in tres æquales partes sive Proportiones. Quare tunc primúm Terminos datæ Proportionis inter se Multiplices, ut antea; Deinde ponas ejus Quadratum; Póstea hujus ipsius Radicem, atque sic quatuor habebis Terminos, qui très æquales continent Proportiones; Differentias autem ubique inæquales, eandem obtinentes proportionem, quã ipsi Termini Mediati inter se habent. E.C. Proportio Octupla, quæ Terminis constat Unitate & primo Cubico, Octonario, dividitur in tres æquales partes, h. e. in tres Duplas proportiones, uti híc sequitur:

8. Numerus Cubicus.
8 —— 1 Termini Mediandi sive in tres æquales Proportiones dividendi.
4. 2. Duæ Medietates: Quadratus & Radix.
2. 2. 2. Tres Proportiones æquales.
8. 4. 2. 1. Termini Mediati sive in tres æquales Proportiones divisi.
4. 2. 1. Tres Differentiæ inæquales.
2. 2. Proportio trium Differentiarum æqualis.

Sic etiam $\frac{1}{27}$. proportionis vigecuplæ septimæ Medietates duæ Geometricæ sunt 9. & 3. proportionis $\frac{1}{64}$. sunt

Media Geometrica 16. & 4. quod Tabella Radicum, Quadratorum & cubicorum ſimplicium palám facit. In Numeris autem majoribus, quæ in illa tabula non continentur, obſervandi ſunt Canones de Quadratorum & Cubicorum Analyſi, quam in penultimo & ultimo hujus libri Capitibus perluſtrabimus.

HARMONICA MEDIATIO eſt, cúm Medietas reperta Terminorum conſtituit proportionalitatem Harmonicam; hoc eſt, inæquales utrinque & Proportiones & Differentias; ſic tamen, ut hæ Differentiæ eandẽ quoque habeant proportionem, quam Termini extremi ad ſe invicem. Ibique in Muſicis ſemper proportio major antecedit minorem. Praxis ejus eſt talis:

Primó Termini Mediandi inter ſe Multiplicantur, factus ab illis iterum Duplicatur, & habetur datæ proportionis Medietas Harmonica. Deinceps colliguntur oblatæ proportionis Termini, ut in Arithmetica Mediatione, Totus inventus in utrunque eorum ducitur, atque hoc pacto fiunt Termini extremi: major ſcilicet, ſi ducas collectum in Terminum majorem; minor, ſi in minorem. Exempli ergo: Duplæ proportionis Medium Harmonicum eſt Quaternarius, hac Operatione:

3. To-

3. Totus.
2.—1. Termini Mediandi.
2. Factus ex Terminis Mediandis.
4. Factus Duplicatus & Medietas.

$1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. Proportiones inæquales.
6. 4. 3. Termini Mediati.
2. 1. Differentiæ inæquales.
2. Proportio Differentiarum.

Hîc Medius Terminus, Quaternarius, utrinque inæquales exhibet Proportiones: cum Senario enim relatus continet Sesquialteram; cum Ternario, Sesquitertiam. Differentias etiam reddit inæquales: quippe ex Senario subductus relinquit Binarium; Ternarium autem excedit unitate tantummodo: Proportionem tamen eandem obtinent, quam extremi, nempe Duplam.

Sic quoque Triplæ Proportionis Medietas Harmonica est Ternarius. Hoc pacto:

4 Totus.
3.—1. Termini Mediandi.
3. Factus ex Terminis Mediandis.
6. Factus Duplicatus & Medietas.

---

2. $1\frac{1}{2}$. Sive in	2. $1\frac{1}{2}$.	Proportiones inæquales.
12. 6. 4. Terminis	6. 3. 2.	Termini Mediati.
6. 2. Minimis.	3. 1.	Differentiæ inæquales.
3.	3.	Proportio Differentiarum.

Item Sesquialterius medium harmonicum eſt 12. hac ratione

	5.	Totus.
3.	2.	Termini Mediandi.
	6.	Factus ex Terminis Mediandis.
	12.	Factus Duplicatus & Medietas.
4	5	Proportiones inæquales.
5	6	

15. 12. 10. Termini mediati.

3. 2. Differentiæ inæquales.

$1\frac{1}{2}$. Proportio Differentiarum.

Hîc deniq; notandum venit, quamvis Mediatio, ut vidimus, Proportionum fit ſectio in duas aut tres partes, has tamen non ſemper eſſe ac intelligi æquales & aliquotas. In ſola namque Geometrica ſectione iſtiusmodi partes aliquotæ dantur; in reliquis veró, Arithmeticá & Harmonicá, nulla Proportio ſe dividi patitur in æquales ſive Aliquotas partes, ſed ſemper tantummodo in inæquales, ſive Non-Aliquotas. Imó nec Geometrica ſemper refert partes Aliquotas, quoties nempe proportio medianda eſt, vel Superparticularis vel Superpartientis generis. E.g. ſi proportio Seſquialtera eſſet Geometricè medianda, ex multiplicatione Terminorum 3. & 2. exiſteret productum 6: quia autem Senarii nulla datur Radix, mediatio iſta irrationalis & ſurda dicitur. Superparticularis enim & Superpartiens Proportiones Proportionalitatem ſive mediationem

nem Geometricam reſpuunt, unde in duas pluresve æquales partes ſive proportiones ſunt individuæ, De quo videas Zarlinum 1. Part. Inſt. Cap. 37. Clavium ad Propos. 8. lib. 8. Euclidis. Calviſium 3. Exerc. Muſ. quæſt. 15. p. 96. Baryphonum in Pleiadib. Mus. quæſt. 2.

Caput X.

De Proportionum ÆQUIPARATIONE.

ÆQUIPARATIO Proportionum dicitur Muſicis Computatio, qua datæ Proportiones inter ſe ratione Quantitatis ita conferuntur, ut, ſi duæ Proportiones fuerint, quarum major minorem quantitate aliquoties exceſſerit, hæc toties ſibi addatur, donec facta quantitatis acceſſione ad illam, quam proximè accedat, aut illam excedat.

Operatio ejus eſt talis:

Primùm diſponuntur Termini datarum Proportionum ita, ut major Proportio ſuperiori, minor veró inferiori collocetur loco. Deinde Multiplicantur Denominatores inter ſe & habetur Denominator utriusque Proportionis communis. Tum Denominator majoris Ptoportionis ducitur in Numeratorem minoris, & contrariè Denomitator minoris in Numeratorem majoris, atque ſic prodeunt tres Numeri priores, nempe *Denomi-*

nator Communis, *Numerator minoris*, *& Numerator majoris Proportionis*. Quoties igitur ad æquiparandam Proportionem majorem minor Proportio eſt reiteranda, toties ducendi ſunt Denominator minoris Proportionis in primum & tertium; & Numerator minoris proportionis in ſecundum æquiparationis numerum, & proveniunt tres novi æquiparationis Numeri. Ac tum Proportionum illa major cenſetur, cujus Numerator eſt minor, & contrá. Quód ſi igitur Numerator Proportionis minoris fuerit major Numeratore Proportionis majoris, æquiparatio dicta Methodo ulterius inſtituenda erit; ſin minor, minús. E.g.

Quæritur, num Sesquitertia proportio tres æquet Sesquioctavas?

Hoc ſic diſcuties ac dilues:

Diſpone primó Terminos *S*esquitertiæ tanquam majoris Proportionis 4. & 3. ſuperiori loco; *S*esquioctavæ veró, minoris Proportionis Terminos 9. & 8. inferiori. *S*ecundó duc Denominatores 9. & 4. in ſe, ac habebis 36. Communem Denominatorem. Tertió, Denominatorem Proportionis *S*esquitertiæ (4.) duc in Numeratorem *S*esquioctavæ (8.) & *Denominatorem* *S*esquioctavæ (9.) in Numeratorem *S*esquitertiæ 3. & habebis Numeratorem minoris Proportionis 32. & majoris 27. *Q*uartó, hi tres Numeri 36. 32. 27. ſi Multiplicantur, primus per 9. ſecundus per 8. & tertius itidem

dem per 9. accipies tres novos Terminos, ſed ejusdem valoris, quem priores tres obtinebant, nimirum Communem Denominatorem 324. Numeratorem Sesquioctavæ 256. & Numeratorem Sesquitertiæ 243. Jam vides, Numeratorem Sesquioctavæ 256. majorem eſſe adhuc Numeratore 243. adeóque illum ab hoc ſuperari: quare pergas in operatione, atque, ut antea, Multiplices Denominatorem proximè inventum 324. per 9: Numeratorem Sesquioctavæ 256. per 8: & Numeratorem Sesquitertiæ 243. rurſus per 9: & reſultabunt Numeri 2916. 2048. 2187: quorum ille novus iterum eſt Denominator Communis; iſte Numerator novus Sesquioctavæ; hic denique Numerator novus Sesquitertiæ. Ex quibus ultimis Numeratoribus inter ſe comparatis apertè colligitur, Sesquitertiam Proportionem eſſe minorem, quám ut tres Sesquioctavas exæquet; ſiquidem, uti antè dictum, ea Proportio habetur major, cujus Numerator eſt minor, & vice verſa. Ecce Διατόνιον.

	Denominator Communis.		Numerator Sesquioctavæ ſeu Proportionis minoris.		Numerator Sesquitertiæ ſeu majoris Proportionis.
	4. Sesqui-		tertia.		3.
	9. Sesquioctava		8.		
I.	36.	1.	32.	a	27.
II.	324.	2.	256.	b	243.
III.	2916.	3.	2048.	c	2187.

Vel hoc modo:

3 8
✠
4 — 9

36. 32. 27.
9. 8. 9.

324. 256. 243.
9. 8. 9.

2916. 2048. 2187.

Sic proportio Sesquiquintadecima ſuperat quinque Sesquioctogeſimas proportiones, & á ſex ſuperatur.

	Denominator Communis.		Numerator Sesquioctogeſimæ		Numerator Sesquiquintæ decimæ.
	16. Sesqui-		quinta decima.		15.
	81. Sesquioctogeſ.		80.		
I.	1296.	1.	1280.	a	1215.
II.	104976.	2.	102400.	b	98415.
III.	8503056.	3.	8192000.	c	7971615.
IV.	688747536.	4.	655360000.	d	645700815.
V.	55788550416.	5	52428800000.	e	52301766015.
VI.	4518872583696.	6	4194304000000.	f	4236443047215.

Vel altero illo modo:

15 ✠ 80
16 —— 81.

1296. 81.	1280. 80.	1215. 81.
104976. 81.	102400. 80.	98415. 81.
8503056. 81.	8192000. 80.	7971615. 81.
688747536. 81.	655360000. 80.	645700815. 81.
55788550416. 81.	52428800000. 80.	52301766015. 81.
4518872583696.	4194304000000.	4236443047215.

Ac tantum quoque de Æquiparatione, quinta & ultima Proportionum Computatione: cui nonnulli addunt & ſextam quandam Speciem, *Comparationem*, peculiariter ſic dictam, qua nimirum Proportiones inter ſe in Quantitate comparant, utra ſit major, utra minor, & quinam Proportionis majoris ultra minorem Exceſſus. Verúm cúm hæc, quà Operatione, qua Demonſtratione, á jam dicta Æquiparatione parúm aut nihil omnino differat, ſciens ac de induſtria eam hoc loco præterii. Quando igitur ſcire cupiunt, an V. g. Sesquialtera ſit major, quám Sesquitertia, nec ne, eadem feré inſtituitur Operatio per decuſſatam Numeratorum & Denominatorum Multiplicationem, & Multiplicationem Denominatorum inter ſe, quæ fit in Æquiparatione; niſi quód ſingulis novis Numeratoribus ſingulatim apponatur Denominator Communis, quemadmodum in Fractionum Reductione ad eandem Denominationem fieri conſuevit, cúm in æquiparatione is ſemel duntaxat ſcribatur. Hoc modo:

2 3 | 8 9
+ |
3—4 | 12 12

Atque ita Termini $\frac{8}{12}$. oſtendunt, Sesquialteram, quam continent, Proportionem eſſe majorem, cúm Numerator hìc ſit minor; ſicut contrá Termini $\frac{9}{12}$. quibus Sesquitertia continetur, Proportionem dant minorem, ubi Numerator major eſt: Differentiam veró harum duarum Proportionum arguunt ambo Numeratores 8. & 9. inter ſe collati, nempe Sesquioctavam Proportionem. Verúm enimveró idem hoc æquè facilè demonſtratur jam dicta *Æquiparatione*, hoc modo:

2 3
+
3—4
———
12. 9. 8.

Nam á 12. ad 9. datur minor Proportio Sesquitertia; á 12. ad 8. Sesquialtera; á 9 ad 8. Differentia utriusque ſive majoris Exceſſus, videlicet Sesquioctava.

Caput XI.

De ANALYSI NUMERI QUADRATI, quam vulgó EXTRACTIONEM RADICIS QUADRATÆ dicunt.

QVadratum Geometris appellatur figura plana, cujus quatuor Latera æqualia ſunt inter ſe, omnésque Anguli

Anguli æquales recti. Hinc pari ratione in Arithmeticis dicitur Numerus Quadratus, qui ita per Unitates collocari poteſt in Quadrati figura, ùt omnia Latera ad ſe invicem æqualia evadant, ad hanc formam:

4.	9.	16.	25	36.	
. .	. . .	. . . .	. . . . .	. . . . . .	
. .	. . .	. . . .	. . . . .	. . . . . .	
	. . .	. . . .	. . . . .	. . . . . .	&c.
		. . . .	. . . . .	. . . . . .	
			. . . . .	. . . . . .	
				. . . . . .	

Latus autem tale vocatur Radix Quadrata vel Numeri Quadrati: quia, ut ex radice arbor, ita ex hoc Numero radicali naſcitur Numerus Quadratus. Si enim Radicem ejusmodi Multiplicas in latitudinem, longitudini æqualem, hoc eſt, in ſeipſam, exſurgit talis Numerus Quadratus, uti ex hac ſimplicium Radicum & Quadratorum tabella perſpicuum eſt.

Radices.	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrati.	4	9	16	25	36	49	64	81

ANALYSIS igitur QUADRATI, ſeu, ut aliás loquimur, EXTRACTIO RADICIS QUADRATÆ, eſt nihil aliud, quám inventio Numeri, qui in ſe Multiplicatus reſtituat Numerum propoſitum, ſi Quadratus eſt; vel, ſi non eſt perfectè Quadratus, maximum Numerum Quadratum in eo contentum. Si ergo oblatus Numerus una aut duabus tantum figuris ſcribatur, Radix ejus eſt digitorum aliquis: & petitur ex jam oſtenſa tabula. Talium quippe Radicum ſimplicium cognitio dari ac poni debet, non inquiri. Quando autem datus Numerus pluribus quám duobus characteribus ſcribitur, Radix ipſius regulis ſequentibus inveſtigatur; quæ quidem maximam partem dependent á Communi Numerorum Diviſione.

Primúm itaque alterni characteres Numeri propoſiti notantur punctis, á dextra nimirum progrediendo lævam verſús: atque hæc puncta non tantúm ſubſerviunt commodiori Operationi, ſed etiam indicium faciunt, quot figuris Radix futura conſtet. Dein, ut in Diviſione, incola quædam Semicircularis ſive Lunaris ad latus dextrum ſeorſim pingitur, cui poſtmodum Radix, tanquam Quotus inſcribatur; licèt hanc Radicem nonnulli ſub ipſis punctis intra duas lineas parallelas annotare ſoleant. Quibus ita diſpoſitis, operare ſecundúm has Regulas:

I. Exordire á ſiniſtris, & vide, an ultimi puncti Numerus, ſeu una ſeu duabus conſtiterit figuris, in tabella Quadratorum inveniatur; ſi ergo ibi exſtat, Radicem ejus annota poſt ſemicirculum, Numerúmque ipſum ultimi puncti dele; ſin minús, accipe Quadratum proximè minorem, ejúſque Radicem notabis poſt dictum ſemicirculum; Quadratum veró ab ultimi puncti Numero ſubtrahe,

trahe, Residuúmque ſupraſcribe, quemadmodum in Diviſione fieri ſolet. Et hujusmodi Radicis inveſtigatio ſemel duntaxat ſub initium Operationis inſtituitur; qui veró deinceps ſequuntur Canones, toties repetendi ſunt, quot fuerint puncta reliqua.

II. Duplica Quotum poſt lineam lunarem annotatum, Duplúmque hoc, quod Diviſoris officio fungetur, pone ſub linea, medio loco inter duo conſignata puncta ſuperiora, ſi nempe Duplum iſtud unica tantúm figura conſtat; ſin duabus aut pluribus, reliquas ordinè ſiniſtram verſus colloca. Ac tum quæritur, quoties hîc Diviſor in Numero directè ſuperſcripto contineatur? Quotus hic bis conſignatur, ſemel poſt ſemicirculum ad priorem Quotum, & ſemel directè ſub puncto proximè ſequente, ad Diviſorem datum.

III. Multiplica hunc Diviſorem, uná cum figura adjuncta, per Quotum proximè inventum; Productum aufer á ſuperiori Reſiduo. Quód ſi tum nihil relinquitur, Operatio jam confecta eſt, & Numerum refert exactè Quadratum; ſi veró quid remanet, id ſupraſcribe, ut in Diviſione, quod Reſiduum Numerum arguit ſurdum. Exemplum eſto Numerus 2025. perfectè Quadratus, cujus Radicem 45. hoc modo reperies:

Primó hujus oblati Numeri characteres in locis imparibus, h.e. uno ſemper charactere prætermiſſo, initio facto á dextris, punctulis diſtingue: quot hîc erunt

puncta,

puncta, tot Notas Radix futura continebit. Deinde pone curvam illam lineam ad marginem, cui Radix inscribatur. Quibus ita præmissis atque dispositis, aggrederejam ipsam operationem, & vide, num ultimus Numerus (20.) in assignata Quadratorum tabula contineatur, quoniam veró in ea non præcise exstat, sume proximè minorem 16. cujus Radix est 4. Hunc Quadratum 16. scribe directè sub 20. & Radicem ejus 4. insere semicirculo marginali. Jam subrahe 16. á 20. manet 4. & dele 16. & 20. Atque hæc est prima ista Operatio non amplius repetenda. Posteá subtus age lineolam transversam, & scribe sub ea directè inter duo puncta, (ut hoc loco sub 2.) Quotum 4. duplicatum, i. e. 8. Hic Numerus est instar Divisoris: ac proinde quæriur, quoties iste Divisor (8.) in 42. habeatur, quia autem quinquies in 40. continetur, Quotum hunc Quinarium bis scribas, primó post semicirculum, & deinde quoque ad Divisoris (8.) dextram. Jam Multiplica Quotum hunc ultimum 5. in Divisorem 8. & Quotum ipsi adscriptum 5. exsurgunt 425. quæ subtrahe á Numero superiori 425. remanet nihil. Atque hinc constat, datum Numerum 2025. esse præcisè Quadratum, cujus Radix est 45. Vide hanc Διατύπωσιν. 3. Exemplorum:

	4		3		481
I.	2025	II.	1225	III.	4050
	16 (45. Radix.		9 (35. R.		36 (63. R.
	85		65		123
	425		325		369

IV.

IV. Si quid postremó post subductionem restat, illud disponitur per modum Fractionis; hac tamen lege, ut Radix inventa tum Duplicetur, & producto semper addatur Unitas, cui id, quod remansit, suprascribitur. Ut in proximé præcedenti Exemplo 4050. quia post ultimam Operationem supermanent 81, Radix 63. duplicata facit 126: his addita Unitas efficit 127. quibus denique Residuum 81. suprascribitur, ut Quotus sit talis: $63\frac{81}{127}$.

V. Quando autem plura superfuerint Puncta in Numero proposito, pro novo Divisore universus Duplicatur Quotus, quoad omnes figuras simul sumtas: ac deinceps absolvitur Praxis, uti jam est expositum. E.g.

118		234
54756		119025
. . . (234.		. . . (345.
4	sic:	9
43		64
129		256
464		685
1856		3425

VI. Hæc duo, ut in Divisione, cumprimis observanda veniunt: 1. ne Quotus assumatur justo major. 2. si inferior in superiore non habetur, ut Cyphra loco Quoti scribatur, atque ad punctum decedatur proximum.

Exempla:

I.	II.
5 7	
145161	366025
. . . (381.	. . . (605.
9	36
68	12
544	1205
761	6025

Quòd si Operationis Δοκιμασίαν *sive Probationem instituere cupis, Multiplica inventam Radicem Quadratè, hoc est, per seipsam: & si Numerus oblatus exactè Quadratus est, idem hîc resultabit. sin autem surdus, qui post ultimam Operationem aliquid reliquit, tum Radici in se ductæ addendum est illud Residuum, & Numerus, ex quo Radix est eruta, restituetur.*

Exempla sunto:

I.	II.
	81
2025 (45.	4050 (36.
(45.	(63.
225	189
180	378
2025.	3969
	81
	4050.

Caput

CAPUT XII.

De ANALYSI NUMERI CUBICI,

quam vulgó EXTRACTIONEM RADICIS CUBICÆ appellitant.

QVemadmodum, uti in præcedenti Capite diximus, Radix Quadrati appellatur Numerus, qui in se ductus Quadratum constituit, sic Radix Cubici nomen sortita est á Cubo Geometrico: qui constat primúm ex ductu Lateris unius in alterum, quo Superficies constituitur: deinde ex ductu ejusdem Superficiei procreatæ in eandem lineam lateris, unde Corpus instar tesseræ formatur. Ac proinde Numerus Cubicus vocatur, qui fit ex Multiplicatione Numeri alicujus in seipsum, Productíque rursus per priorem. Prior autem ille, è cujus ductu in suum Quadratum Cubus efficitur, Latus Cubi dicitur, & Radix Cubica sive Cubici Numeri. Unde Numerus Quadratus & Cubicus unam eandémque semper habent Radicem. Ut enim Senarius est Radix Quadrati 36. ita etiam Cubici 216.

Est itaq; ANALYSIS CVBI sive NVMERI CVBICI, Resolutio hujus in suum Latus seu Radicem suam. Vel, inventio Numeri, qui primò in seipsum, deinde etiam in Productum Multiplicatus Numerum propositum restituat.

Conficitúrque secundúm has Regulas:

I. *In Numeris Simplicibus sufficit cognitio novem Simplicium Radicum: quæ hîc quoque dari, non quæri debet.* Horum typum sive Diagramma superiús quidem Cap. 1. hujus libri posuimus, commodioris autem doctrinæ gratiá eundem hîc repetemus:

Radices	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729

II. *In majoribus Numeris Operatio ita se habet:*

Primò, Numeri notantur Punctis, ut in Analysi Quadratorum, initio facto á dextris, ita tamen, ut hîc bini semper intermittantur characteres, & tertius quisque signetur. *Secundò*, ultimi Puncti Numerus quæritur in tabella jam apposita, an inter Cubos Simplices inveniatur; qui si non præcise ibi exhibetur, sumitur proximè minor, & excerpitur Radix ei respondens, qui post semicirculum notatur; Cubicus autem ipse Numerus directè Numero dato subscriptus ex eodem subducitur, & quod restat, suprascribitur. *Tertiò*, triplicatur Numerus in semicirculo; atque hoc Triplum ponitur sub figura præcedenti Puncto sinistram versus proxima. *Quartó*, Multiplicatur Quotus in Triplum, ut novus existat Divisor: qui uno loco remotiús notatur lævam versus, quám Triplum positum est. *Quintó*, Divisoris illius Quotus adscri-

adſcribitur priori in ſemicirculo, & ter Multiplicatur: 1. *Simpliciter* in Diviſorem, & Factus ſubjicitur Diviſori. 2. *Quadratè* in ſe, & Factus ducitur in Triplum, Productúmque Triplo ſubjicitur. 3. *Cubicè* in ſe, & Productum ſubſcribitur Cubo, qui Puncto eſt inſignitus. Hæc tria Producta Addita auferuntur ex ſuperiori Cubo, &, ſi quod eſt Reſiduum, ſupraſcribitur. Quód ſi tum plura ſuperfuerint Puncta, eadem Operatio repetitur; ubi autem tenendum, quód univerſus jam quotus ſit Triplicandus, & in Triplum ducendus pro novo Diviſore; cúm deinceps in reliquis illis tribus Multiplicationibus poſtrema tantúm Radicis ſive Quoti figura adhibeatur.

Exempla.

I.

1
14789
41063625
. . . (345. Radix.
27

9 Tripl.
27 Diviſor.

108 Simpl.
144 quadr.
64 Cub.
} Multipl.

12304 *Summa.*

II.

132
1860867
. . . (123. Radix.
1

3 Tripl.
3 Diviſor.

6 Simpl.
12 Quadr.
8 Cubicè
} Multipl.

728 Summa.

102 Tripl.		36 Tripl.	
3468 Divisor.		432 Divisor.	
17340 Simpl.		1296 Simpl.	
2550 Quadr.	Multipl.	324 Quadr.	Multipl.
125 Cub.		27 Cub.	
1759625 Summa.		132867 Summa.	

Δοκιμασία *sive Probatio instituitur per Multiplicationem Cubicam inventæ Radicis, ut prodeat Numerus Cubicus, si perfectè est Cubicus.* Ut in Exemplis allatis:

```
41063625 (345          1860867 (123
          345                    123
      -------            ---------
         1725                   369
        1380                   246
       1035                    123
      -------            ---------
       119025                 15129
          345                   123
      -------            ---------
       595125                 45387
      476100                 30258
     357075                  15129
     --------            ---------
     41063625.              1860867.
```

Quòd si non sit exactè Cubicus, Facto ex Radicis inventæ Cubicâ Multiplicatione Addatur Residuum, perinde ut in præcedenti Capite de Quadratis dictum.

LIBER

LIBER TERTIUS,

De potioribus Elementis Geometricis, ad MONOCHORDI dimensionem, reliquámque Sonorum Musicorum tractationem Mathematicam facientibus.

AXIOMATA.

I.

Linea Recta inter suos Terminos æqualiter interjacet, cùm infinita esse non possit.

II.

Terminorum alter est, à quo Linea incipit, alter, in quem desinit. Nunquam enim Linea uno solo Puncto terminatur.

III.

Inter quæcunque duo Puncta media quandam actu aut potentiâ protensam intercipi oportet lineam.

IV.

Cuivis Lineæ potentiâ media insunt Puncta, quibus dividitur.

V.

Linea in quotlibet æquas partes dividitur.

VI.

Lineæ partes, quæ in puncto æquali medio conjunguntur, sunt æquales; quæ in inæquali, inæquales: & altera quidem major, altera minor.

VII.

Lineæ Parallelæ ubique æqualiter distant.

PRO-

PROBLEMATA.

I.

A dato Puncto datæ Rectæ Lineæ Parallelam Rectam Lineam ducere.

Ex puncto C ducenda sit linea G H, lineæ A B parallela. Ducatur ex C ad A B linea C D utcunque, atque eádem aperturá circini describantur duo Arcûs, alter ex Centro D, ad C E; alter ex Centro C ad D F. Deinde beneficio circini capiatur intervallum E C, & transferatur in D F, ita ut alterum crus figatur in D, & altero crure Arcus ibidem abscindatur in F. Dico, Rectam G H per puncta C F ductam, Parallelam esse ipsi A B. *Vide infrà in subjectâ Tabulâ Figuram* 1.

Aliter. Delineentur duo Arcûs ad unum idem intervallum, ex C & E lineæ datæ A B; agaturque per extremitates D F linea recta G H, erit & hæc Parallela ipsi A B. *Vide Fig.* 2.

II.

Datam Rectam Lineam finitam bifariam secare.

Sit recta finita A B dividenda bifariam, i. e. in duas partes æquales. Ex Centro A ad quodvis intervallum (quod tamen dimidium lineæ A B excedat) describantur duo Arcûs, unus supernè, alter infernè; & ex Centro B, ad idem intervallum alii duo Arcûs delineentur, qui priores secent in C & D. Recta ducta C D secabit rectam datam A B bifariam in E. *Vide Fig.* 3.

III.

III.

Datam Rectam Lineam insectam similiter secare, ut data altera Recta secta fuerit.

Sit recta A B secanda similiter, ut secta est Recta A C in D & E, h. e. in Partes, quæ sint Partibus A D, D E, E C, Proportionales. Conjungantur datæ duæ lineæ ad A, facientes Angulum quemcunque B A C, & connectatur recta B C. Deinde ex D, E, agantur D F, E G, Parallelæ ipsi B C. Dico, rectam A B similiter esse sectam in F & G, ut est secta A C in D & E. Quód si ducatur D H, ipsi F B parallela, secans E G in I; erit rursus, ut D E ad E C, ita D I ad I H. *Vide Fig.* 4.

IV.

Datam Rectam Lineam finitam in quotlibet partes æquales secare.

Ex præcedenti Problemate hoc ipsum colligitur & dependet. Sit enim data recta A B dividenda in quinque partes æquales. Ductá rectá A C, faciente cum A B quemcunque Angnlum C A B, abscindantur ex ea quinque partes æquales cujuslibet magnitudinis, A D, D E, E F, F G, G H. Quia igitur linea recta A H utcunque divisa est, ducatur recta H B, & huic ex punctis D, E, F, G, parallelæ agantur D I, E K, F L, G M. Dico rectam A B similiter esse divisam in quinque partes æquales, ut A H. *Vide Fig.* 5.

Aliter. Ab extremis punctis A & B educantur duæ rectæ B C, A D, inter se parallelæ, h. e. quæ Angulos A B conſtituant æquales : & ex B C abſcindantur quatuor partes æquales BE, EF, FG, GH, ut ſint tot partes, una miminús, in quot linea eſt dividenda. His deinde ex A D totidem æquales reſecentur AI, IK, KL, LM. Ductis itaque rectis EM, FL, GK, HI, ſecantibus rectam A B, in N, O, P, Q: dico ipſam A B ſectam eſſe in quinque partes æquales, *Vide Fig. 6.*

SCHOLIUM.

Quandoque accidit, ut linea dividenda adeò ſit brevis, ut ejus Diviſio per Circinum effici non queat: quare tum inſtrumento quodam Triangulari, infrà Figurâ 7. expreſſo, uti poteris, cujus beneficio lineolam rectam quantulamcunque in minutiſſimas imparatas particulas ſecare licet. Imperetur itaque, ut lineam in dato inſtrumento H I, aut etiam quamcunque aliam & quantumvis brevem ſecemus in partes quinque æquales. Paretur inſtrumentum ejusmodi Diviſioni in tot partes accommodatum, hoc pacto: Ductis lineis A B, A C, ad rectum Angulum coëuntibus & quaſi conſtruendum eſſet Scalenum aliquod, ex Baſi A B abſcindantur quinque partes æquales cujuslibet Magnitudinis, AD, DE, EF, FG, GB. Deinde ex ſingulis hiſce punctis agantur lineæ rectæ in punctum C. & habebis inſtrumentum omni quinariæ ſectioni aptum. Ut enim linea A B ſecta eſt in quinque partes AD, DE, EF, FG, GB. ita etiam linea parallela H I quinque æquales continet partes HK, KL, LM, MN, NI. Et ſic infinitè in reliquis ad Angulum C verſus. *Vide Fig. 7.*

V.

V.

A datâ Rectâ Lineâ Quadratum describere.

Sit data recta A B, super quam oporteat Quadratum describere. Ex A & B educantur AC, BD, perpendiculares ad AB, sintque ipsi AB æquales, & connectatur recta CD. Dico ABDC esse quadratum. *Vide Fig.* 8.

VI.

Datam Rectam Lineam in quotcunque partes æquales secare continua progressione. Secundùm Meibomium ad Præfationem in Arist. Quintil.

*D*ata sit linea recta AB. Hanc in duas æquales partes secabimus in E, per 10. Propos. lib. 1. Euclidis. In tres autem partes sequenti Methodo: Quadrato ABCD á data linea AB descripto, & bifariam secta A B in E, ducatur linea DE, & *D*iagonius CB, quæ priorem secat in F. Per hoc punctum ipsi DB vel CA parallela agatur H G. Dico F H duplam esse ipsius F G, i. e. F H bessem totius A B, & F G trientem · Similiter in quatuor partes secabimus lineam A B, ducendo primúm lineam DG, & deinde parallelam L K: erit enim I K quadrans totius A B. Et eodem modo B N pars quinta; adeóque continuando eandem Operationem in infinitum, in quotcunque partes æquales proposita linea A B secabitur. Eadem autem sectione lineæ A B etiam linea C B in partes quotcunque secatur, uti est evidens. Hæc Meibomius dicto loco. *Vide Fig.* 9:

VII.

Latus aliquod Quadrati ex Diagonii sectione in quotlibet Partes æquales continuâ progressione secare; Quadratúmque ipsum una eadémque opera in singulas suas dividere Unitates.

Construatur Quadratum ABCD, agatúrque Diagonius CB, hæc dividatur bifariam, & per hoc punctum, quod Centrum quadrati est, agatur linea parallela ipsi DB vel CA, in E. Deinde ducatur linea DE, atque per punctum, ubi hæc linea Diagonium intersecat, iterum agatur Parallela in F. Porró ducatur linea DF, & per punctum, ubi hæc Diagonium secat, Parallelam in G, & sic deinceps. Adeóque quando perventum est ad partem quæsitam, qualis in subjecta Figura est quinta pars, beneficio circini mensuretur hæc deorsum BH, HI, IK, KL, LA; & eádem apertura circini in reliquis quadrati lateribus AM, MN, NO, OP, PC; CQ, QR, RS, ST, TD; DU, UW, WX XY. Jam agantur lineæ perpendiculares YM, XN, WO, UP: ac postremó lineæ DH, HS, SK, KQ, QA. Quibus omnibus confectis Numeri suo quisque loco inscribantur, uti *in Figura* 10. exstant.

VIII.

Duabus datis rectis lineis, mediam Proportionalem adinvenire.

Sint duæ rectæ AB & CB, quibus media invenienda est Proportionalis FB. Extendatur linea AB in punctum D, ita ut BD æqualis existat lineæ CB. Deinde divisa AD bifariam in G, ex G, centro, & intervallo GA, vel GD, semi-

ſemicirculus deſcribatur AED. Tum ex puncto D agatur linea in E, uti & ex puncto E in A. Ac tandem ex B ad AD perpendicularis educatur B E, ad circumferentiam usque. *Dico* B E dare F B mediam Proportionalem inter AB, & CB. *Vide Fig.* 12.

THEOREMA.

Si in Triangulo Rectangulo, ab Angulo Recto in Baſin perpendicularis ducta ſit: quæ ad perpendicularem Triangula, tùm toti Triangulo, tùm ipſa inter ſe ſimilia ſunt.

In Triangulo ABC, Angulus BAC ſit rectus, á quo ad Baſin perpendicularis agatur AD. *Dico* Triangula ADB, ADC, ſimilia eſſe, & toti Triangulo ABC, & inter ſe. *Vide Fig.* 11.

IX.

Dati Circuli Peripheriam in duas & quatuor, una eadémque opera ſecare partes.

Primó ſit peripheria EHFG ſecanda bifariam. *Ducatur* recta ſubtendens CB, quá diviſá bifariam in D, erigatur perpendicularis EF, ex puncto D per centrum A ducta, hæc peripheriam dictam bifariam ſecabit in F. Vel, deſcribantur duo Arcûs, unus ex centro C, alter ex centro B, qui ſupra centrum A eodem intervallo ſe mutuó interſecent: Recta F E per illud inventum punctum & centrum ducta, ſecabit peripheriam in duas æquales partes. Similiter, ſi eadem peripheria in quatuor partes dividenda ſit, alii duo Arcûs iterum deſcribantur ex centris F & E, ac novam repereris Diametrum G H, quæ cum priore F E, datam Peripheriam in quatuor secat partes. *Vide Fig.* 13.

X.

Dati Circuli Peripheriam in sex & tres simul dividere partes.

Facillimo negotio hoc perficitur, modó scias, ipsam Semidiametrum sive Radium, (uti aliás dicitur) sextam cujusvis Peripheriæ partem dare. Ac proinde sexta illa pars bis sumta procreat tertiam ejusdem oblatæ Circumferentiæ partem. Ut in subjecta *Figura* 14. sexta pars invenitur in AB, BC, CD, DE, EF, FA. Tertia autem in AC, CE, EA.

XI.

Circuli Peripheriam unâ eâdemque opera in quinque ac decem partes secare.

Sit datus Circulus A B C, cujus centrum D. Ductá autem Diametro B C, erigatur D A perpendicularis ad B C. Deinde divisa semidiametro B D bifariam in E, ducatur recta E A, cui æqualis abscindatur E F, adjungatúrque recta AF. Dico rectam AF circumferentiæ esse quintam partem, & D F decimam. *Vide Figuram* 15.

XII.

Datæ Rectæ lineæ Peripheriam Circuli reperire æqualem.

Sit data recta linea AB, quæ in circularem redigenda, hoc est, ut circularis totidem contineat partes ejusdem Proportionis, quot earum in linea continentur recta.

DIVI-

Dividatur primúm recta AB bifariam in BC, CA: *Deinde* hoc dimidium BC, rursus in partes undecim, BD, DE, EF, FG, GH, HI, IK, KL, LM, MN, NC: tum ex hisce undecim partibus abscindantur septem, quæ Diametrum futuri circuli constituunt. Postremó, si talis reperta Diameter bifariam secatur, habetur centrum O, ex quo circumferentia ipsa ducitur. Porró agatur Diameter perpendicularis PQ per centrum O: ac tum Diameter mensuretur ter in BK, KR, RS, & K consignetur Numero 7. R Numero 14. S Numero 21. A Numero 22. Quemadmodum igitur 7. harum partium ad 22, ita se habet Diameter ad peripheriam sive circumferentiam: id quod partes ostendunt PT, TU, UW, WX, XY, YZ, Za, ab, bc, cd, de, & deinceps pa, ae, ef, fP. *Vide Fig.* 16.

XIII.

Dati Circuli Circumferentiæ Rectam lineam reperire æqualem.

Sit peripheria ducta ex centro A, & in quatuor partes B, E, C, D, tributa, è cujus Diametro DE ducenda sit linea circumferentiæ æqualis. Educatur primó ex Diametro linea recta quantumlibet longa: deinde Diamerer dati circuli ter mensuretur in linea ducta, nempe in DE, EF, FG: Posteá secetur Diameter DE in septem partes æquales EH, HI, IK, KL, LM, MN, ND; harum partium una addatur in fine hujus lineæ puncto G, ut habeatur GO, ubi linea illa reperta abscindatur.

De-

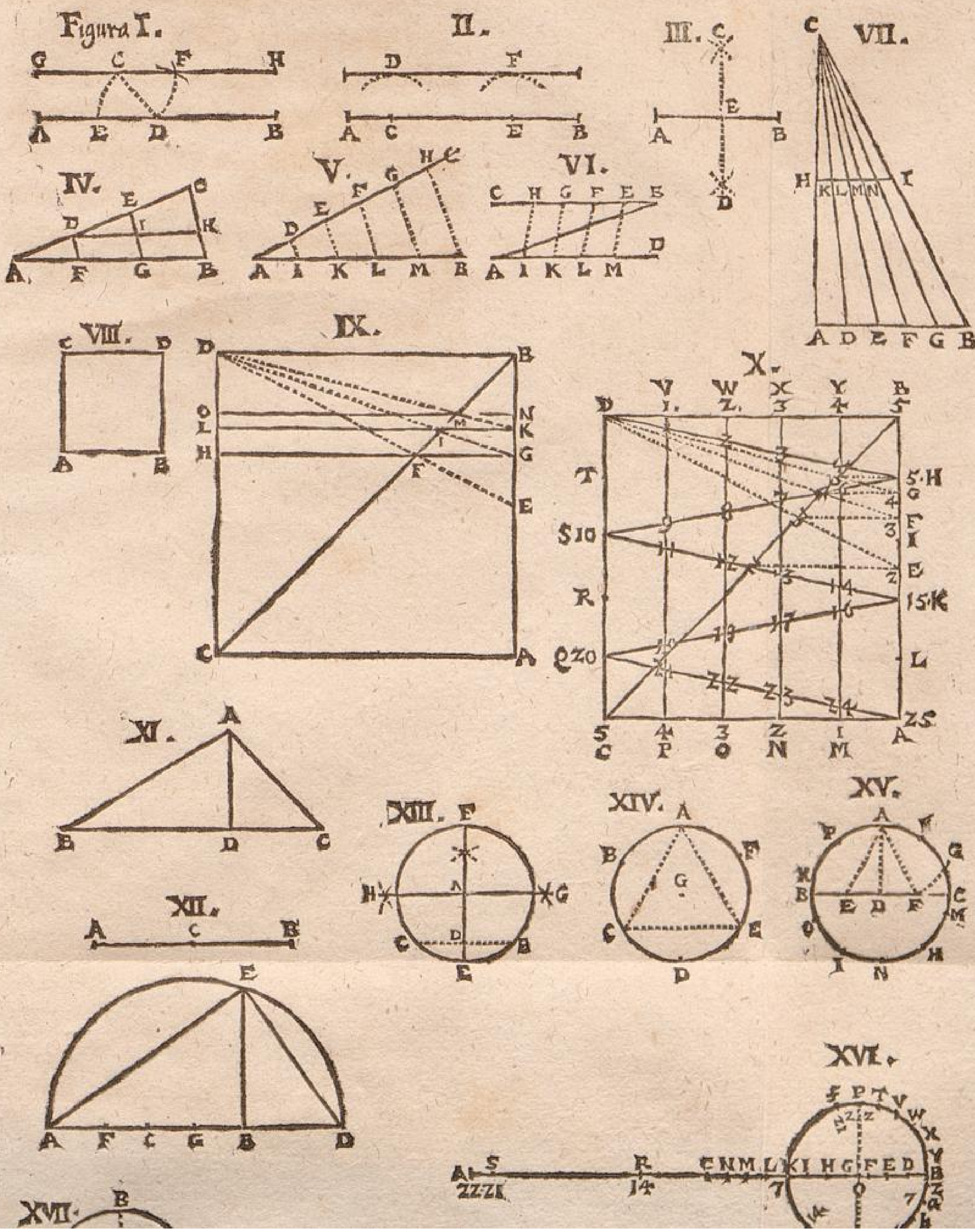
Denique consignetur litera E Numero 7. F Numero 14. G Numero 21. & O Numero 22. Prout in *Figurâ* 17. & ultima est expressum. Atque adeó linea educta recta æqualis erit dati circuli peripheriæ, & vice versa.

Ac tantum quoque de ELEMENTIS seu PRINCIPIIS GEOMETRICIS, Musico præcipuè cognoscendis. Demonstrationes autem; quas brevitatis studio hîc jam omisimus, in proxima editione, uná cum aliis fortasse nonnullis, addentur; interea loci ex Euclide aliísve Mathematicis possunt peti.

PARTIS GENERALIS

FINIS.

Hæc Tabula pertinet ad pag. 128.



D
G
&
a

C
fo

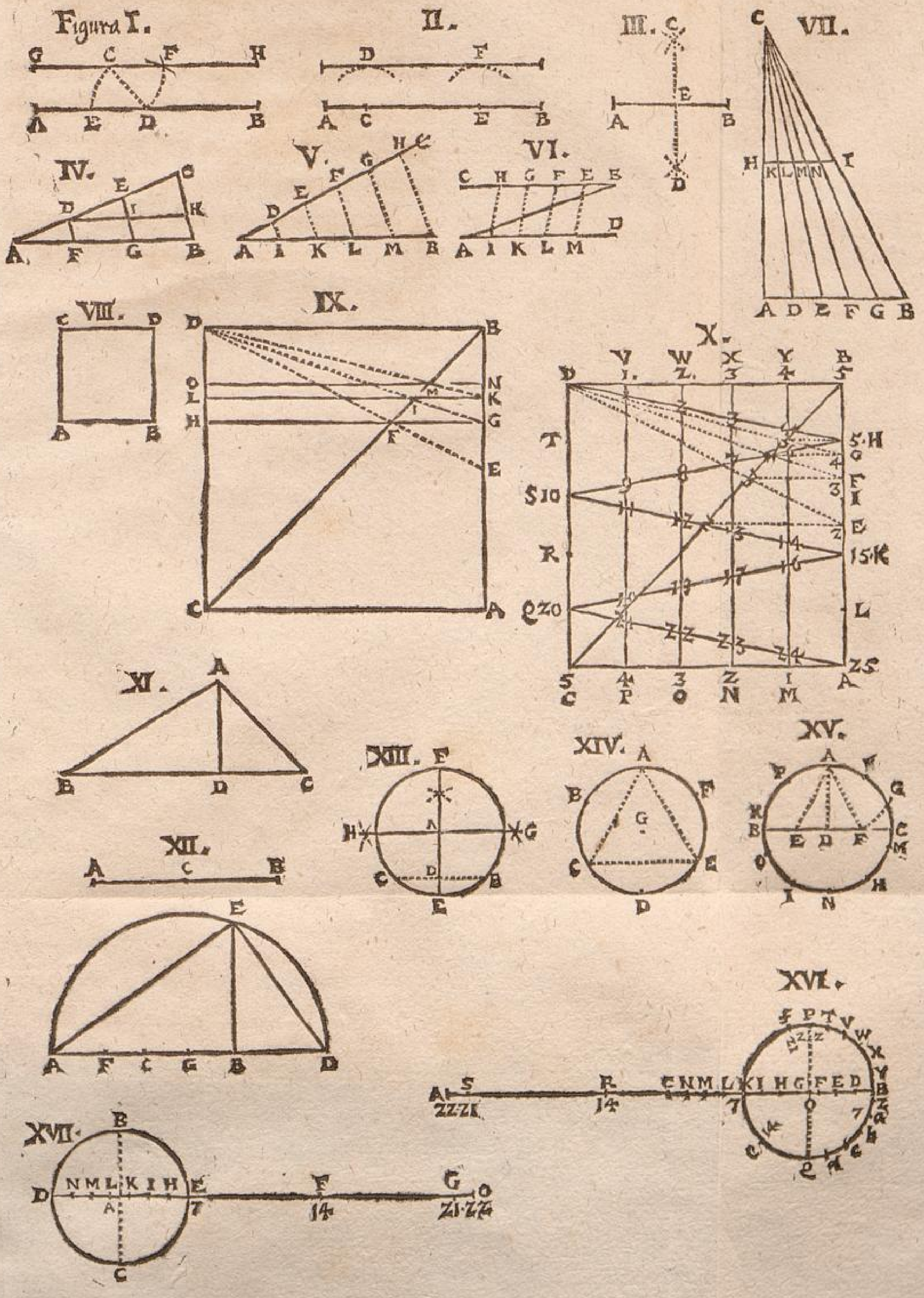
[illegible]

Denique consignetur litera E Numero 7. F Numero 14. G Numero 21. & O Numero 22. Prout in *Figurâ* 17. & ultima est expressum. Atque adeó linea educta recta æqualis erit dati circuli peripheriæ, & vice versa.

Ac tantum quoque de ELEMENTIS seu PRINCIPIIS GEOMETRICIS, Musico præcipuè cognoscendis. Demonstrationes autem; quas brevitatis studio hîc jam omisimus, in proxima editione, uná cum aliis fortasse nonnullis, addentur; interea loci ex Euclide aliísve Mathematicis possunt peti.

PARTIS GENERALIS
FINIS.

Hæc Tabula pertinet ad pag. 128.



MVSICA OTTONIS GIB