Brem: c. 1427.

Beyträge
zur
Erweiterung der Kentniß
der
Seewissenschaften

von

Daniel Braubach,
Doctor der Philosophie und öffentlicher Lehrer der Seefahrtkunde in Bremen.

Erster Theil.

Bremen,
bey Joh. Heinr. Müller.
1805.

Sr. Wohlgebornen

dem

Herrn Obrist-Lieutenant

C. G. D. Müller

in Stade,

aus Hochachtung und Freundschaft,

gewidmet.

Vorbericht.

Die Veranlassung dieses Buchs, oder, wenn man lieber will, dieser Compilation — denn eine Abänderung, oder andre Wendung eines bekanten Beweises wird wohl schwerlich in den Augen eines Kenners einem Schriftsteller das Verdienst eines Erfinders geben — ist der rühmliche Eifer, mit welchem in diesem Jahrzehend unsre vaterländische, der Seefahrt sich widmende Jugend, die Nautik zu studiren anfängt. Es ist jetzt, und ich spreche aus Erfahrung, nichts Seltenes, junge deutsche Seefahrer zu finden, die nicht allein alle Aufgaben der Steuermannskunst aufzulösen im Stande sind, und von denselben deutliche Begriffe haben; sondern auch hinlängliche Kentnisse der Mathematik besitzen, um die Beweise derselben einzusehen. Für diese allein, ist dies kleine Werk, das ich dem Publicum hiemit vorlege, geschrieben.

Den Titel Erweiterungen der Kentniß der Seewissenschaften, wählte ich, nicht als ob ich durch diese Schrift auf das Recht eines Erfinders Anspruch machen, oder das prahlende Aushänge-Schild eines Anch'io son pittore aufstecken wollte; sondern einzig und allein aus der Absicht, diesen jungen Leuten zu

zei-

zeigen, daß die vollkomne Kenntniß ihrer Wissenschaft durch die Elementar-Geometrie nicht begränzt sey; daß, um ihr ganzes Fach vollkommen zu kennen, mehr Kentniß erforderlich sey, als sie in den gewöhnlichen Anleitungen zur sogenanten Steuermanns-Kunst anzutreffen gewohnt sind, und daß diese Kentnisse, die sie dort vermissen, doch nichts weniger als unbedeutend sind.

So reich unser deutsches Vaterland auch an Compendien aller Art ist, so fehlt es uns doch, so viel ich weiß, durchaus an einem Buche, aus welchem der Seefahrer, der so viel Geometrie, als er zur Auflösung der Aufgaben der gewöhnlichen Steuermanns-Kunst gebraucht, erlernet

hat,

hat, dasjenige lernen kann, was der höhere Theil seiner Wissenschaft erfordert. Um diese Lücke auszufüllen schrieb ich dies Buch, dessen Fehler und Mängel ich recht gut weiß; aber, da ich noch kein Anderes dieser Art kenne, dennoch dem Publicum vorlege, damit Andre die Bahn, wohin ich nur zeigte, zum Besten meines Vaterlandes betreten, und mit Ehre vollenden mögen.

Bremen im October 1805.

Der Verfasser.

Erster Abschnitt.

Von den trigonometrischen Functionen.

§. 1.

Weil in den gewöhnlichen Lehrbüchern der sogenannten Steuermanns-Kunst diese Lehre fast gar nicht abgehandelt ist, so halte ich es für nothwendig, um nicht immer auf Schriftsteller zu verweisen, die dem Seefahrer selten in die Hände fallen, die ihm unumgänglich nothwendigen Formeln hier vorabgehen zu lassen.

§. 2.

Jeder Seefahrer wird aus der Trigonometrie wissen, daß in Fig. 1 nd der Sinus, bd der Cosinus, ae die Tangente, hf die Cotangente, be die Secan-

Secante, bk die Cosecante und ad der Sinus versus oder Quersinus des Bogens na, oder des $<$ nba genannt werden. Ebenfalls wird er sich erinnern, daß die Größe des Sinus, Cosinus, der Tangente, Secante, Cotangente und Cosecante für den $<$ nba einerley mit derjenigen des $<$ lbe, welcher das Supplement des erstern ist. Die Lage der Cosinusse dieser beyden Winkel aber ist nicht einerley, denn bd liegt bk diametralisch gegenüber. Wenn nb sich um b bis in die Lage bh drehet, oder $<$ hba $=$ 90° wird, so wird der Cosinus desselben $=$ o und der Sinus gleich dem Halbmesser bh $=$ ab. Wenn bh sich um b bis nach i drehet nnd der $<$ iba stumpf wird, so ist zwar immer noch kb $=$ bd, wenn $<$ ibl $=$ $<$ eba, aber bk liegt in Hinsicht auf bd an der audern Seite des Mittelpunkts b, warum man denn

zu

zu sagen pflegt, daß der Cosinus negativ sey und mit dem Zeichen Minus bezeichnet werden müsse, so daß, obgleich der Cosinus des Supplements eines Bogens einerley Größe mit demjenigen des Bogens selbst hat, derselbe dennoch negativ seyn muß. Das nemliche muß auch für die Tangente ao, Secante bo, Cotangente und Cosecante Statt finden, welche alle unterhalb dem Halbmesser fallen. Der Sinus nd = ik bleibt positiv, weil er oberhalb dem Durchmesser al liegt, und er kann bloß negativ werden, wenn der Bogen ahlq größer als 180° wird, weil alsdann dq unterhalb dem Durchmesser al fällt. Bezeichnet man nun den < nba mit b, und setzt den Radius = 1, so ist:

1) $\text{Sin. } b^2 + \text{Cosin. } b^2 = 1$; denn nach dem bekannten Lehrsatze des Pythagoras ist im △ bdn $bn^2 = bd^2 + dn^2$,

dn^2, dies ist, $1 = \text{Cosin. } b^2 + \text{Sin. } b^2$, woraus denn folgt:

2) $\text{Sin. } b^2 = 1 - \text{Cosin } b^2$ und

3) $\text{Cosin. } b^2 = 1 - \text{Sin. } b^2$.

§. 3.

Ferner ist:

1) $\text{Tang } b = \frac{\text{Sin. } b}{\text{Cosin. } b}$; denn da $\triangle\, bdn \backsim \triangle\, bae$, so ist $bd : dn = ba : ae$, dies ist:

$\text{Cosin. } b : \text{Sin. } b = 1 : \text{Tangent } b$,

also $\frac{\text{Sin. } b}{\text{Cosin. } b} = \text{Tangent } b$.

2) $\frac{\text{Cosin. } b}{\text{Sin. } b} = \text{Cot. } b$; denn da $\triangle\, brn \backsim \triangle\, bhf$, so ist $br : rn = bh : hf$, oder:

$\text{Sin. } b : \text{Cosin. } b = 1 : \text{Cot. } b$,

also $\frac{\text{Cosin. } b}{\text{Sin. } b} = \text{Cot. } b$.

3) Aus 1 und 2 folgt Tng. b $\times$ Cot. b $= \frac{\text{Sin. b}}{\text{Cosin. b}} \times \frac{\text{Cosin. b}}{\text{Sin. b}}$, oder Tang. b $\times$ Cot. b $= 1$, also Tang. b $= \frac{1}{\text{Cot. b}}$, und Cot. b $= \frac{1}{\text{Tang. b}}$.

4) Aus 2 folgt Cosin. b $=$ Sin. b $\times$ Cot. b und aus 1. Sin. b $=$ Tang b $\times$ Cosin. b.

5) Secant b $= \frac{1}{\text{Cosin. b}}$; denn bd : bn $=$ ba : be, dies ist, Cosin. b : 1 $=$ 1 : Secant b, also $\frac{1}{\text{Cosin. b}} =$ Secant b.

6) $\frac{1}{\text{Sin. b}} =$ Cosecant b; denn:

br : bn $=$ bh : bf oder

Sin. b : 1 $=$ 1 : Cosecant b, also

$\frac{1}{\text{Sin. b}} =$ Cosecant b.

§. 4.

§. 4.

Wenn ABC Fig. 2 u. 3 ein schiefwinklichtes Dreieck ist, so wird ein Propendicul von C auf BA innerhalb Fig. 2, oder ausserhalb Fig. 3 des Dreyecks fallen, je nachdem die Winkel A und B spitzig, oder einer von ihnen, nemlich A, stumpf ist; immer werden aber zwey rechtwinklichte Dreiecke BCD und ACD entstehen. Bezeichnet man nun die Seiten des Dreiecks mit a, b und c, die ihnen gegenüberliegenden Winkel aber mit A, B und C, so ist $CD = b.\ \text{Sin.}\ A$, $CD = a.\ \text{Sin.}\ B$, $AD = b\ \text{Cosin.}\ A$, $BD = a\ \text{Cosin.}\ B$. Nun ist in Fig. 2 $BD = AB - AD = c - b.\ \text{Cosin.}\ A$ und in Fig. 3 $BD = AB + AD = c + b.\ \text{Cosin.}\ A$; weil aber hier der $< A$ stumpf, folglich Cosin A verneint ist, so gilt die Formel für beyde Fälle, nur muß Cosin. A für einen stumpfen Winkel verneint genommen werden. In dem rechtwinklichten $\triangle$ CBD ist nun allemahl $a = \sqrt{(CD^2 + BD^2)}$, und wenn man die für CD und BD gefundenen Werthe setzt, so ergiebt sich: $a = \sqrt{(b \text{ Sin. } A)^2 + (c - b. \text{ Cosin. } A)^2)}$, oder $a = \sqrt{(b^2 \text{ Sin. } A^2 + c^2 - 2\,bc \text{ Cosin. } A + b^2 \text{ Cosin. } A^2)}$, $a = \sqrt{b^2 (\text{Sin. } A^2 + \text{Cosin. } A^2) + c^2 - 2\,bc \text{ Cosin. } A}$, und da $\text{Sin. } A^2 + \text{Cosin. } A^2 = 1$, so ist $a = \sqrt{(b^2 - 2\,bc \text{ Cosin. } A + c^2)}$. Hieraus folgt, daß man aus 2 Seiten b und c und dem eingeschlossenen Winkel A allemahl die dritte Seite a, welche demselben Winkel gegenüber liegt, bestimmen kann.

§. 5.

Aus den im 4ten §. entwickelten Formeln folgt, daß:

a Sin.

a Sin. B : a Cosin. B = b Sin. A : c — b Cosin. A und daher $\frac{b. \text{ Sin. } A}{c - b \text{ Cosin. } A}$

$$= \frac{a \text{ Sin. } B}{a \text{ Cosin. } B} = \frac{\text{Sin. } B}{\text{Cosin. } B} = \text{Tang. } B.$$

§. 6.

Vermittelst des vorhergehenden läßt sich nun aus dem gegebnen Sinus und Cosinus zweyer Winkel oder Bogen A und B der Sinus und Cosinus ihrer Summe A + B und Differenz A — B bestimmen. Denn es ist:

1) Sin. (A + B) = Sin. A. Cosin. B + Sin. B. Cosin. A.

2) Cosin. (A + B) = Cosin. A Cosin. B — Sin. A. Sin. B.

3) Sin. (A — B) = Sin. A. Cosin. B — Sin. B. Cos. A.

4) Cosin. (A — B) = Cosin. A. Cosin. B + Sin. A. Sin. B.

Be-

Beweis.

Man setze, daß $A + B < 180°$, es muß also noch ein dritter Bogen hinzukommen, wenn $A + B + C = 180°$ seyn soll; man kann sich also in Fig. 2 und 3 unter A, B und C die 3 Winkel eines Dreyecks ABC vorstellen, so daß $A + B = 180° - C$, also $\text{Sin.}\,(A + B) = \text{Sin.}\,(180° - C) = \text{Sin.}\,C$.

Nun hat man aber im $\triangle$ ABC:

$\text{Sin.}\,C : \text{Sin.}\,B = c : b$, und daher

$\text{Sin.}\,C = \frac{c}{b}\,\text{Sin.}\,B$, also auch

$\text{Sin.}\,(A + B) = \frac{c}{b}\,\text{Sin.}\,B$.

Nun war aber nach §. 5. $\frac{b\ \text{Sin.}\,A}{c - b\ \text{Cos.}\,A}$

$= \frac{\text{Sin.}\,B}{\text{Cosin.}\,B}$, also $b.\ \text{Sin.}\,A =$

$\frac{c\ \text{Sin.}\,B - b\cdot\text{Sin.}\,B.\ \text{Cosin.}\,A}{\text{Cosin.}\,B}$, und

b. Sin.

b. Sin. A. Cosin. B $=$ c Sin. B — b Sin. B. Cosin. A, oder b. Sin. A. Cosin. B $+$ b. Sin. B. Cosin. A $=$ c. Sin. B, und Sin. A. Cosin. B $+$ Sin. B. Cosin. A $= \frac{c}{b}$. Sin. B, woraus denn folgt, daß $\frac{c}{b}$. Sin. B $=$ Sin. (A $+$ B) $=$ Sin. A. Cosin. B $+$ Sin. B. Cosin. A, welches die erste Formel war.

Verwechselt man in der so eben gefundenen Formel die Buchstaben A und C, so ist auch Sin. A $=$ Sin. C. Cosin. B $+$ Sin. B. Cos. C. Substituirt man hier wiederum statt Sin. C den vorhergefundenen Werth, so ist

Sin. A $=$ Sin. A. Cos. B^2 $+$ Sin. B. Cos. A. Cos. B $+$ Sin. B. Cos. C oder Sin. A (1 — Cos. B^2) $=$ Sin. B. Cos. A. Cosin. B $+$ Sin. B. Cosin. C

oder

oder Sin. A. Sin. B^2 = Sin. B. Cos. A. Cos. B + Sin. B. Cos. C und endlich Sin. A. Sin. B = Cos. A. Cos. B + Cos. C, also Cos. C = Sin. A. Sin. B — Cos. A. Cos. B. Da nun A + B = 180° — C, so ist auch Cos. (A + B) = Cos. 180 — C = Cos. C; folglich auch

Cosin. (A + B) = Sin. A. Sin. B — Cos. A. Cos. B.

Weil nun die Nebenwinkel CAE und CAB Fig. 2 gleich große Sinusse und Cosinusse haben, so kann auch A den äussern Winkel CAE bedeuten; und man hat alsdann A — B = C; folglich Sin. (A — B) = Sin. C und Cosin. (A — B) = Cosin C. Aus der obengefundnen Formel Sin. C = Sin. A Cos. B + Sin. B. Cos. A wird alsdann Sin. (A — B) = Sin. A. Cos. B — Sin. B. Cos. A, weil wegen des stumpfen $<$ A der Cos. A negativ wird. Aus der Formel

Cos. C $=$ Sin. A. Sin. B — Cos. A. Cos. B folgt, weil Cos. A an sich negativ ist, die 4te Formel, nemlich Cos. (A — B) $=$ Cos. A. Cos. B $+$ Sin. A. Sin. B.

§. 7.

Wenn man in der ersten Formel des vorhergehenden Paragraphs A $= 90^\circ$ sezt, so erhält man Sin. ($90^\circ + B$) $=$ Cos. B, und aus den 2ten und 4ten, wenn A $=$ 90 ist, folgt Cos. ($90^\circ \pm B$) $= \mp$ Sin. B. Setzt man A $=$ B, so giebt die 1te Formel Sin. 2 A $=$ 2 Sin. A. Cos. A, und die 2te Cos. 2 A $=$ Cosin. A^2 — Sin. A^2. Setzt man hier Sin. $A^2 = 1$ — Cosin. A^2, so ergiebt sich Cos. 2 A $=$ Cosin. A^2 — (1 — Cosin. A^2) oder Cosin. 2 A $= 2$ Cosin. $A^2 - 1$. Addirt man N°. 2 und 4, so ist Cos. (A $+$ B) $+$ Cosin. (A — B) $=$ 2 Cos. A. Cos. B. Ebenso, wenn

wenn No. 1 und 3 addirt werden, erhält man: $\text{Sin.}\,(A + B) + \text{Sin.}\,(A - B) = 2\,\text{Sin.}\,A.\ \text{Cos.}\,B.$

§. 8.

Aus den 7ten §. folgt $\text{Cosin.}\,A^2 = \frac{\text{Cosin.}\,2\,A + 1}{2}$, und wenn man $\frac{1}{2}\,A$ anstatt A setzt, $(\text{Cosin.}\,\frac{1}{2}A^2) = \frac{\text{Cos.}\,A + 1}{2}$, und daher $1 + \text{Cosin.}\,A = 2\,(\text{Cosin.}\,\frac{1}{2}\,A^2)$, und ebenfalls $1 - \text{Cosin.}\,\frac{1}{2}\,A^2 = \frac{1 - \text{Cos.}\,A}{2}$. Da ferner $1 - \text{Cosin.}\,\frac{1}{2}\,A^2 = \text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,A^2$, so ist auch $\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,A^2 = \frac{1 - \text{Cos.}\,A}{2}$, und $1 - \text{Cos.}\,A = 2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,A^2$.

§. 9.

So lange der Winkel oder Bogen $A < 90^\circ$, ist $\text{Sin. Versus}\,A = 1 - \text{Cosin.}\,A$, und

und daher Sin. Versus $A = 2$ Sin. $\frac{1}{2} A^2$,

oder auch Sin. V. $A = \frac{(2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} A)^2}{2}$.

Wenn aber $A > 90°$, so ist

Sin. Versus $A = 1 +$ Cosin. A,

oder auch Sin. Versus $A = 2 -$ Sin. V. Suppl. A, und also Sin. V. $A = 2$ (Cosin. $\frac{1}{2}$ A)^2 nach §. 8. und ebenfalls Sin. V. $A = \frac{\text{Sin. } A^2}{\text{Sin. V. Suppl. } A}$; denn in Fig. 1 hat man zufolge der Natur des Kreises folgendes Verhältniß: $ad : nd = nd : ld$, also auch $ad = \frac{nd^2}{ld}$, welches unsre letztre Formel ist.

§. 10.

Wenn man im §. 6 die Formeln N°. 1 und 3 durcheinander multiplicirt, und das Product auf den einfachsten Ausdruck bringt, so erhält man:

Sin. $(A + B) \times$ Sin. $(A - B)$ $=$ Cosin. B^2 — Cosin. A^2; woraus denn folgt Sin. $(A + B) \times$ Sin. $(A - B) =$ Sin. A^2 — Sin. B^2, weil Cosin. $B^2 =$ $1 -$ Sin. B^2 und Cosin. $A^2 = 1 -$ Sin. A^2. Multiplicirt man N^o. 2 u. 4, so erhält man Cosin. $(A + B) \times$ Cosin. $(A - B) =$ Cosin. B^2 — Sin. A^2, oder Cosin. $(A + B) \times$ Cosin. $(A - B)$ $=$ Cosin. A^2 — Sin. B^2.

Multipl. man ferner N^o. 1 durch N^o. 4, so ist Sin. $(A + B) \times$ Cos. $(A - B) =$

$$\frac{\text{Sin. } 2A + \text{Sin. } 2B}{2};$$

denn das erste Product giebt

Sin. A. Cosin. A. Cosin. B^2 + Sin. A. Cosin. A. Sin. B^2 + Sin. B. Cosin. B. Cosin. A^2 + Sin. B. Cosin. B. Sin. A^2, oder auch Sin. A. Cosin. A (Sin. B^2 + Cosin. B^2) + Sin. B. Cosin. B (Cosin. A^2 + Sin. A^2), und 1

statt

statt Sin. B^2 + Cosin. B^2 und ebenfalls 1 statt Cosin. A^2 + Sin. A^2 gesetzt, giebt Sin. A Cos. A + Sin. B. Cos. B, und da nach §. 7. Sin. A. Cosin. A $= \frac{\text{Sin. } 2\,A}{2}$ und Sin. B. Cosin. B $= \frac{\text{Sin. } 2\,B}{2}$, so ist auch Sin. (A + B) × Cosin. (A — B) $= \frac{\text{Sin. } 2\,A + \text{Sin. } 2\,B}{2}$. Mulplicirt man N^o. 2 und 3 im 6 §., so erhält man Sin. (A — B) × Cosin. (A + B) $=$

$$\frac{\text{Sin. } 2\,A - \text{Sin. } 2\,B}{2}.$$

§. 11.

Setzt man nun überall im 10^{ten} §. statt A und B bloß $\frac{1}{2}$ A und $\frac{1}{2}$ B, so erhält man:

1) Cosin. $\frac{1}{2}\,B^2$ — Cosin. $\frac{1}{2}\,A^2$ = Sin. $\frac{1}{2}$ (A + B) Sin. $\frac{1}{2}$ (A — B)

2) Sin. $\frac{1}{2}\,A^2$ — Sin. $\frac{1}{2}\,B^2$ = Sin. $\frac{1}{2}$ (A + B). Sin. $\frac{1}{2}$ (A — B). Substituirt

man

man in N° 1 aus §. 8 Cosin. $\frac{1}{2}$ A² = $\frac{\text{Cosin. A} + 1}{2}$ und statt Cosin. $\frac{1}{2}$ B² nur $\frac{\text{Cos. B} + 1}{2}$, so ist $\frac{\text{Cosin. B} + 1}{2}$ — $\left(\frac{\text{Cosin. A} + 1}{2}\right)$ = Sin. $\frac{1}{2}$ (A + B) Sin. $\frac{1}{2}$ (A — B) oder $\frac{\text{Cos. B} - \text{Cos. A}}{2}$ = Sin. $\frac{1}{2}$ (A + B). Sin. $\frac{1}{2}$ (A — B), und daher auch $\frac{\text{Cos. B} - \text{Cos. A}}{2}$ = Cos. $\frac{1}{2}$ B² — Cos. $\frac{1}{2}$ A². Ferner ist aus §. 10.

3) Cosin. $\frac{1}{2}$ B² — Sin. $\frac{1}{2}$ A² = Cos. $\frac{1}{2}$ (A + B). Cos. $\frac{1}{2}$ (A — B)

4) Cos. $\frac{1}{2}$ A² — Sin. $\frac{1}{2}$ B² = Cos. $\frac{1}{2}$ (A + B). Cos. $\frac{1}{2}$ (A — B).

Substituirt man hier aus §. 8 für Sin. $\frac{1}{2}$ A², Cosin. $\frac{1}{2}$ A², Sin. $\frac{1}{2}$ B² und Cosin. $\frac{1}{2}$ B² ihre Werthe, so erhält man

man für $N^o. 3\ \frac{\text{Cosin. B} + 1}{2} - \left(\frac{1 - \text{Cos. A}}{2}\right) = \text{Cos. } \tfrac{1}{2}(A + B).$
Cos. $\tfrac{1}{2}$ (A — B) oder

5) $\text{Cos. B} + A = 2\ \text{Cos. } \tfrac{1}{2}(A + B).$
Cos. $\tfrac{1}{2}$ (A — B). Ebenso

6) $\text{Sin. } (A + \text{Sin. B}) = 2\ \text{Sin.} \left(\frac{A + B}{2}\right). \text{Cos. } \tfrac{1}{2}(A - B)$ und

7) $\text{Sin. } (A - \text{Sin. B}) = 2\ \text{Sin.} \left(\frac{A - B}{2}\right). \text{Cos. } \tfrac{1}{2}(A + B).$

§. 12.

Dividirt man nun in §. 11 $N^o.$ 7 durch $N^o.$ 2, so erhält man

$$1)\ \frac{\text{Sin. A} - \text{Sin. B}}{\text{Cos. B} - \text{Cos. A}} = \frac{2\ \text{Cos. } \tfrac{1}{2}(A + B).\ \text{Sin. } \tfrac{1}{2}(A - B)}{2\ \text{Sin. } \tfrac{1}{2}(A + B).\ \text{Sin. } \tfrac{1}{2}(A - B)} =$$

Cotang.

Cotang. $\frac{1}{2}$ (A + B). Setzt man hier B = 0, so ist Cotang. $\frac{1}{2}$ A = $\frac{\text{Sin. A}}{1 - \text{Cosin. A}}$ No. 2.

Dividirt man ferner §. 11. No. 6 durch 5, so ist: $\frac{\text{Sin. A} + \text{Sin. B}}{\text{Cosin. A} + \text{Cosin. B.}} = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}\text{ (A + B). Cos. } \frac{1}{2}\text{ (A — B)}}{\text{Cos. } \frac{1}{2}\text{ (A + B). Cos. } \frac{1}{2}\text{ (A — B)}}$ No. 3 = Tang. $\frac{1}{2}$ (A + B). Ist wiedrum B = 0, so ist Tang. $\frac{1}{2}$ A = $\frac{\text{Sin. A}}{\text{Cosin. A} + 1}$ (No. 4).

Dividirt man ferner aus §. 11. No. 7 durch No. 5, so erhält man:

$$\text{No. 5. } \frac{\text{Sin. A — Sin. B}}{\text{Cos. B + Cos. A}} =$$

$$\frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}\text{ (A — B). Cos. } \frac{1}{2}\text{ (A + B)}}{\text{Cos. } \frac{1}{2}\text{ (A + B). Cos. } \frac{1}{2}\text{ (A — B)}} =$$

Tangent $\frac{1}{2}$ (A — B).

Dividirt man No. 6 durch No. 2, so ist

$$\text{No. 6.}\quad \frac{\text{Sin. A} + \text{Sin. B}}{\text{Cos. B} - \text{Cos. A}} =$$

$$\frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} (A + B).\ \text{Cos. } \tfrac{1}{2} (A - B)}{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} (A + B).\ \text{Sin. } \tfrac{1}{2} (A - B)} =$$

$\text{Cot. } \tfrac{1}{2} (A - B)$.

Dividirt man endlich hier No. 6 durch No. 3, so ist:

$$\frac{\text{Sin. A} + \text{Sin. B}}{\text{Cos. B} - \text{Cos. A}} : \frac{\text{Sin. A} + \text{Sin. B}}{\text{Cos. A} + \text{Cos. B}},$$

oder $\dfrac{\text{Sin. A} + \text{Sin. B}}{\text{Cos. B} - \text{Cos. A}} \times \dfrac{\text{Cos. A} + \text{Cos. B}}{\text{Sin. A} + \text{Sin. B}},$

welches gleich $\dfrac{\text{Cos. A} + \text{Cos. B}}{\text{Cos. B} - \text{Cos. A}} =$

$$\frac{\text{Cot. } \tfrac{1}{2} (A - B)}{\text{Tang. } \tfrac{1}{2} (A + B)}.$$

§. 13.

Weil nach §. 12. Tangent $\tfrac{1}{2}$ A $=$ $\dfrac{\text{Sin. A}}{\text{Cos. A} + 1}$, so ist auch Tang. $\tfrac{1}{2}$ A $=$

Sin.

$$\frac{\text{Sin. A} \times \text{Sin. A}}{\text{Sin. A}(\text{Cos. A}+1)} = \frac{\text{Sin. A}^2}{\text{Sin. A}(1+\text{Cos. A})}$$

$$= \frac{1 - \text{Cos. A}^2}{\text{Sin. A}\ (1 + \text{Cos. A})} =$$

$$\frac{(1+\text{Cos. A})\ (1-\text{Cos. A})}{\text{Sin. A}\ (1 + \text{Cos. A})} = \frac{1 - \text{Cos. A}}{\text{Sin. A.}}$$

$$= \frac{1}{\text{Sin. A}} - \frac{\text{Cosin. A}}{\text{Sin. A}},$$ oder Tang $\frac{1}{2}$ A

= Cosecant A — Cotang. A, und daher

Cot. A = Cosecant A — Tang. $\frac{1}{2}$ A.

Zwei=

Zweiter Abschnitt.

Von der Auflösung schiefwinklichter sphärischer Dreiecke durch analytische Formeln, ohne einen Perpendikel zu ziehen.

§. 14.

Ich setze bey meinen Lesern die Kentniß der gewöhnlichen Auflösung sphärischer Dreiecke vermittelst eines Perpendikels, wodurch die schiefwinklichten in zwey rechtwinklichte getheilt werden, voraus, und gehe sogleich zu der Anwendung der Analysis auf die sphärischen Dreiecke über, wodurch man Formeln erhält, in welchen die Sinus, Tangenten, Cosinus und Cotangenten eines jeden Winkels und einer jeden Seite eines Dreyecks durch zwey Gleichungen

gen

gen in ganzen Termen des Dreyecks ausgedrückt werden. Die hauptsächlichsten dieser Formeln werden wir hier zu beweisen suchen.

§. 15.

Die Formeln der Sinusse dtr Winkel und Seiten eines Kugeldreyecks lassen sich äußerst leicht bestimmen. Denn in fig. 4. im $\triangle$ ABC hat man bekantlich folgende Proportionen:

Sin. AB : Sin. < C = Sin. AC : Sin. < B = Sin. BC : Sin. < A, woraus denn sehr leicht gefolgert wird, daß:

$$\text{Sin. A} = \frac{\text{Sin.} < \text{B} \times \text{S. BC}}{\text{S. AC}} = \frac{\text{Sin. C. Sin. BC}}{\text{Sin. AB}}, \text{ Sin. AB} =$$

$$\frac{\text{Sin. BC. Sin.} < \text{C}}{\text{Sin.} < \text{A}} = \frac{\text{Sin. AC. Sin.} < \text{C}}{\text{Sin.} < \text{B}}$$

u. s. w.

§. 16.

Um die Formeln der Cosinussen aller Winkel und Seiten eines Kugeldreiecks zu finden.

Wenn man die Formeln für die Winkel und Seiten der Dreyecke sucht, so muß man vorzüglich darauf achten, daß in den Ausdrücken dieser Formeln keine andere Termen, als ganze Seiten oder Winkel des Dreiecks vorkommen, und darum muß man, wenn das Perpendikel z. B. in fig. 4. aus C auf AB fällt, die Theile der Basis AD und DB nebst den Winkeln ACD und CDB dadurch aus den Formeln wegzuschaffen suchen, daß man für dieselben gleiche Ausdrücke substituirt, in welchen ganze Stücke des △ ABC enthalten sind, welches aus folgender Auflösung deutlicher erhellen wird.

Nach den gewöhnlichen Regeln hat man: Cos. $<$ A : Cos. $<$ B $=$ Sin. ACD : Sin. $<$ BCD, und daher Cos. $<$ A $=$

Sin.

$\frac{\text{Sin. ACD. Cos. B}}{\text{Sin. BCD}}$. Nun aber ist Sin. ACD $=$ Sin. (ACB — BCD), und nach §. 6. No. 3. hat man: Sin. (ACB — BCD) $=$ S. ACB. Cos. BCD — Cos. ACB. S. BCD. Substituirt man nun diesen Werth statt S. ACD in die Formel für Cos. A, so ist Cos. A $=$ $\left(\frac{\text{S. ACB. Cos. BCD} - \text{Cos. ACB. S. BCD}}{\text{Sin. BCD}}\right) \times$ Cos. B. Nun ist aber $\frac{\text{Cos. BCD}}{\text{Sin. BCD}} =$ Cot. BCD $= \frac{1}{\text{Tang. BCD}}$ (§. 3. No. 3.); also ist auch Cosin. A $= \frac{\text{S. ACB. Cos. B}}{\text{Tang. BCD}}$ — Cos. ACB. Cos. B. Im rechtwinklichten $\triangle$ BDC aber ist: Cosin. BC : 1 $=$ Cot. B : Tang. $<$ BCD; also $\frac{1}{\text{Tang. BCD}}$ $= \frac{\text{Cos. BC}}{\text{Cot. B}}$; und daher Cos. A $=$

Sin.

$\frac{\text{Sin. ACB Cos. B. Cos. BC.}}{\text{Cot. B}}$ — Cos. C. Cos. B.

Endlich ist $\frac{\text{Cos. B}}{\text{Cot. B}} = \text{Sin. B.}$ (§. 3), dies substituirt, giebt

Cos. A = Sin. C. Sin. B. Cos. BC — Cos. C. Cos. B, woraus denn folgt:

Sin. C. Sin. B. Cos. BC = Cos. A + Cos. C. Cos. B, und daraus Cos. BC $= \frac{\text{Cos. A + Cos. C. Cos. B}}{\text{Sin. C. Sin. B}}$.

§. 17.

Andre Ausdrücke für Cos. BC und Cos. A lassen sich auch also finden: In dem △ ABC Fig. 4 hat man

Cos. AD : Cosin. BD = Cos. AC : Cos. BC, und daher Cos. BC = $\frac{\text{Cos. BD} \times \text{Cos. AC}}{\text{Cos. AD}}$.

Nun

Nun ist aber wiederum nach §. 6. N°. 4 Cos. BD = Cos. (AB — AD) = Cos. AB. Cos. AD + Sin. AB. Sin. AD. Dies wiederum statt Cos. BB substituirt, so ist Cos. BD = Cos. AC

$$\left(\frac{\text{Cos. AB. Cos. AD} + \text{S. AB. S. AD}}{\text{Cos. AD.}}\right)$$

Nun aber ist nach §. 3. N°. 1.

$$\frac{\text{Sin. AD}}{\text{Cos. AD}} = \text{Tang. AD} = \frac{1}{\text{Cot. AD}}\text{; folgl.}$$

$$\text{Cos. BC} = \text{Cos. AC. Cos. AB} + \frac{\text{Cos. AC. Sin. AB}}{\text{Cot. AD}}.$$

Im rechtwinklichten △ ADC hat man Cos. A : 1 = Cot. AC : Cot. AD, also

$$\frac{1}{\text{Cot. AD}} = \frac{\text{Cosin. A}}{\text{Cot. AC}}\text{, substituirt also}$$

$$\text{Cos. BC} = \text{Cos. AC. Cos. AB} + \frac{\text{Cos. AC. S. AB. Cos. A}}{\text{Cot. AC}} \text{ und } \frac{\text{Cos. AC}}{\text{Cot. AC}}$$

= Sin. AC (§. 3); folgl. Cos. BC =

$Cos. AC. Cos. AB + Sin. AC. Sin. AB$
$Cos. A$, und hieraus folgt

$Sin. AC. Sin. AB. Cos. A = Cos. BC$
$- Cos. AC. Cos. AB$, also auch

$$Cos. A = \frac{Cos. BC - Cos. AC. Cos. AB}{Sin. AC. Sin. AB}.$$

Zusatz 1.

Wenn man das Propendikel aus B auf AC gezogen hätte, so würde man die nemlichen Ausdrücke für die Cosinusse von A und BC erhalten haben.

Zusatz 2.

Aus diesen beiden Formeln lassen sich nun sehr leicht diejenigen für die Cosinusse eines der andern Winkel und seiner gegenüberliegenden Seite herleiten. Wenn man z. B. die Formeln für B und AC haben will, so bleibt das Perpendikel in seiner Lage und $< C$ und AB behalten ihre vorherige Relation so daß man bloß in den

vori-

vorigen Formeln überall BC mit AC und $<$ B mit $<$ A zu verwechseln braucht, um die Formeln

$$\text{Cos. B} \left\{ \begin{array}{l} = \text{Sin. A. Sin. C} \times \text{Cos. AC} \\ - \text{Cos. A. Cos. C} = \\ \dfrac{\text{Cos. AC} - \text{Cos. AB. Cos. BC}}{\text{Sin. AB Sin. BC}} \end{array} \right.$$

$$\text{Cos. AC} \left\{ \begin{array}{l} = \dfrac{\text{Cos. B} + \text{Cos. A. Cos. C}}{\text{Sin. A. Sin. C.}} \\ = \text{Cos. AB. Cos. BC} + \text{S. AB.} \\ \text{Sin. BC. Cos. B} \end{array} \right.$$

zu erhalten.

Zusatz 3.

Um die Cosinusse des $<$ C und seiner gegenüber liegenden Seite AB zu finden, kann man sich nur den Perpendikel aus B auf AC gezogen denken, so werden $<$ B und AC bey dieser Lage des Perpendikels das seyn, was der $<$ C und AB vorher waren. Man darf also nur in den beiden letzten Formeln C in B und AB in AC verwandeln, und man wird alsdann haben:

$$\mathrm{Cos.\,C}\ \begin{cases} = \mathrm{Sin.\,A.\ Sin.\,B.\ Cos.\,AB} \\ - \mathrm{Cos.\,A.\ Cos.\,B} = \\ \dfrac{\mathrm{Cos.\,AB} - \mathrm{Cos.\,AC\ Cos.\,BC}}{\mathrm{Sin.\,AC.\ Sin.\,BC}}. \end{cases}$$

$$\mathrm{Cos.\,AB}\ \begin{cases} = \dfrac{\mathrm{Cos.\,C} + \mathrm{Cos.\,A.\ Cos.\,B}}{\mathrm{Sin.\,A.\ Sin.\,B}} \\ = \mathrm{Cos.\,AC.\ Cos.\,BC} + \\ \mathrm{Sin.\,AC.\ Sin.\,BC.\ Cos.\,C.} \end{cases}$$

§. 18.

Wenn die Winkel A und B von verschiedener Art sind, nemlich, wenn A scharf und B stumpf ist, und das Perpendikel CD auf die Verlängerung von AB fällt; so hat man in Fig. 5

$$\mathrm{Cos.\,A} = \frac{\mathrm{Sin.\,ACD.\ Cos.\,B}}{\mathrm{Sin.\,BCD}};$$ aber

nun ist Sin. ACD. = Sin. (ACB + BCD) = Sin. ACB. Cos. BCD +

Sin.

Sin BCD. Cos. ACB nach §. 6. No. 1. Substituirt man diesen Werth für Sin. ACD in der ersten Formel, und bringt alles auf den einfachsten Ausdruck, wie oben, so erhält man

Cos. A = Sin. C. Sin. B. Cos. BC + Cos. C. Cos. B und Cos. BC =

$$\frac{\text{Cos. A} - \text{Cos. C. Cos. B}}{\text{Sin. B. Sin. C.}}.$$

Bey Winkeln von verschiedner Art, wie A und B, giebt die zweyte Auflösung

$$\text{Cos. BC} = \frac{\text{Cos. BD. Cos. AC}}{\text{Cos. AD}};$$ allein nun

ist Cos. BD = Cos. (AD — AB) = Cos. AD. Cos. AB + Sin. AD. Sin. AB nach §. 6., daher ist wiederum

Cos. BC = Cos. AC. Cos. AB + Sin. AC. Sin. AB. Cos. A. also Cos. A =

$$\frac{\text{Cos. BC} - \text{Cos. AC. Cos. AB}}{\text{Sin. AC. Sin. AB}},$$ welches

eben-

ebenso mit den übrigen Winkeln und Seiten des Dreiecks ist.

§. 19.

Wenn man nach Fig. 6 annimt, daß A der stumpfe und B der scharfe Winkel sey, und das Perpendikel über A hinausfalle, so hat man dennoch für die erste Auflösung

$$\text{Cos. } A = \frac{\text{Sin. } ACD. \text{ Cos. } B}{\text{Sin. } BCD}$$; allein nun

ist Sin. ACD = Sin. (BCD — ACB) = Sin. BCD. Cos. ACB — Sin. ACB. Cos. BCD und folglich substituirt, ist

Cos. A = Cos. B. Cos. C — Cos. B. Cot. BCD. Sin. C.

Aber im rechtwinklichten △ DCB ist Cos. BC : 1 = Cot. BCD : Tang. < B, also Cot. BCD = Cos. BC. Tang. B und daher Cos. A = Cos. B. Cos. C — Sin. B. Sin. C. Cos. BC und Cos. BC =

$$\frac{-\text{ Cos. } A + \text{ Cos. } B. \text{ Cos. } C}{\text{Sin. } B. \text{ Sin. } C}.$$

Fer-

Ferner hat man nach Fig. 6.

$$\text{Cos. BC} = \frac{\text{Cos. BD. Cos. AC}}{\text{Cos. AD}},$$ wo nun

Cos. BD = Cos. (AB + AD) = Cos. AB. Cos. AD — Sin. AB. Sin. AD, welches auf den einfachsten Ausdruck gebracht, Cos. BC = Cos. AC. Cos. AB — Sin. AC. Sin. AB. Cos. A und Cos. A =

$$\frac{-\text{Cos. BC} + \text{Cos. AC. Cos. AB}}{\text{Sin. AC. Sin. AB}}$$ giebt.

§. 20.

Um die Formeln für die Tangenten der Winkel und Seiten eines Kugeldreiecks zu finden, fälle man nach Fig. 4 aus C das Perpendikel auf AB, so hat man nach den gewöhnlichen Regeln der Dreieckmessung

Tang. A : Tang. B = Cot. B : Cot. A = Sin. BD : Sin. AD, folglich Tang. A. Sin. AD = Tang. B. Sin. BD, aber Sin. AD = Sin. (AB — DB) =

Sin.

Sin. AB. Cos. BD — Cos. AB. Sin. BD, welches substituirt, geben wird

$$\text{Tang. A.} \left(\frac{\text{Sin. AB. Cos. BD}}{\text{Sin. BD}} - \text{Cos. AB}\right)$$

$= \text{Tang. B.}$ Aber nach §. 3 ist $\frac{\text{Cos. BD}}{\text{Sin. BD}} = \frac{1}{\text{Tang. BD}}$, und im $\triangle$ BCD hat man Cos. B : 1 = Cot. BC : Cot. BD oder auch Cos. B : 1 = Tang. BD : Tang. BC und daraus Tang. BD = Cos. B. Tang. BC, also $\frac{\text{Cos. BD}}{\text{Sin. BD}}$

$= \frac{1}{\text{Cos. B. Tang. BC}}$; folgl. auch Tang. A.

$$\left(\frac{\text{Sin. AB}}{\text{Tang. BC. Cos. B}} - \text{Cos. AB}\right) = \text{Tang.}$$

B, oder Tang. A. (Sin. AB — Cos. AB. Tang. BC. Cos. B = Tang. BC. Cos. B. Tang. B. Nun dividire man alles durch Tang. BC und substituire Sin. B statt Cos. B. Tang. B nach §. 3, so ist Tang. A.

$$\left(\frac{\text{Sin. AB}}{\text{Tang. BC}} - \text{Cos. AB. Cos. B}\right) = \text{Sin. B.}$$

Nun

Nun aber ist $\frac{1}{\text{Tang. } BC} = \text{Cot. } BC$ nach §. 3, also Tang. A (Sin. AB. Cot. BC — Cos. AB. Cos. B) = Sin. B, also Tang. A

$$= \frac{\text{Sin. } B}{\text{Sin. } AB. \text{ Cot. } BC - \text{Cos. } AB. \text{ Cos. } B}.$$

Zusatz 1.

Hätte man den Perpendikel aus B auf AC gezogen, so ändert sich die Relation von BC zum < A nicht, aber AC und B haben dann die Relation zu A, die vorher AB und C hatten, und aus der vorigen Formel wird

$$\text{Tang. } A = \frac{\text{Sin. } C}{\text{S. } AC. \text{ Cot. } BC - \text{Cos. } AC. \text{ Cos. } C.}$$

Zusatz 2.

Wenn der Perpendikel wieder aus C auf AB gezogen ist, und man will den Ausdruck für den < B haben, so darf man nur in der ersten Formel überall statt A den > B und AC statt BC setzen, so ist Tang. B =

$$\frac{\text{Sin. } A.}{\text{S. } AB. \text{ Cot. } AC - \text{Cot. } AB. \text{ Cos. } A.}$$

Zusatz. 3.

Wird der Perpendikel aus A auf BC gezogen, so wird aus AB bloß BC und aus A wird C, und man hat

$$\text{Tang. } B = \frac{\text{Sin. } C.}{\text{Sin. } BC.\ \text{Cot. } AC - \text{Cos. } BC.\ \text{Cos. } C}$$

Zusatz 4.

Aus dieser letzten Formel erhält man einen Ausdruck für Tang. C, wenn C mit B und AC mit AB verwechselt wird, denn alsdann erhält man

$$\text{Tang } C = \frac{\text{Sin. } B}{\text{S. } BC.\ \text{Cot. } AB - \text{Cos. } BC\ \text{Cos. } B.}$$

Zusatz 5.

Zieht man das Perpendikel aus B auf AC und verwechselt B mit A und BC mit AC, so ist

$$\text{Tang. } C = \frac{\text{Sin. } A}{\text{S. } AC.\ \text{Cot. } AB - \text{Cot. } AC.\ \text{Cos. } A.}$$

§. 21.

§. 21.

Um die Formeln für die Tangenten der Seiten eines Dreiecks zu finden, beschreibe man fig. 7 das Polar-Dreieck abc von dem Kugeldreiecke ABC, in welchem, wie aus der gewöhnlichen Trigonometrie bekannt seyn muß,

Tang. $<$ a = Tang. AB

Tang. $<$ b = Tang BC

und Tang. $<$ c = Tang AC ist; folglich hat man nach §. 20

$$\text{Tang.} < a \left\{ \begin{aligned} &= \frac{\text{Sin. b}}{\text{Sin. ab. Cot. bc.} - \text{Cos. ab. Cos. b}} \\ &= \frac{\text{Sin. c}}{\text{Sin. ac. Cot. bc} - \text{Cos. ac. Cos. c}}; \end{aligned} \right.$$

$$\text{Tang. AB} \left\{ \begin{aligned} &\text{dies ist} \\ &= \frac{\text{Sin. BC}}{\text{Sin. B. Cot. C} - \text{Cos. B. Cos. BC}} \\ &= \frac{\text{Sin. AC}}{\text{Sin. A Cot. C} - \text{Cos. A, Cos. AC.}} \end{aligned} \right.$$

Verfährt man mit Tang. $<$ b und Tang. $<$ c eben so, so erhält man:

$$\text{Tang. BC} \left\{ \begin{array}{l} = \dfrac{\text{Sin. AB}}{\text{Sin. B. Cot. A} - \text{Cos. B Cos. AB}} \\ = \dfrac{\text{Sin. AC}}{\text{Sin. C. Cot. A} - \text{Cos. C. Cos. AC.}} \end{array} \right.$$

$$\text{u. T. AC} \left\{ \begin{array}{l} = \dfrac{\text{Sin. BC}}{\text{Sin. C Cot. B} - \text{Cos. C. Cos. BC}} \\ = \dfrac{\text{Sin. AB}}{\text{Sin. A. Cot. B} - \text{Cos. A. Cos. AB.}} \end{array} \right.$$

§. 22.

Die Formeln für die Cotangenten der Winkel und Seiten eines Dreiecks lassen sich vermittelst derjenigen der Tangenten also finden. Wenn nach fig. 4 das Perpendikel aus C auf BA fällt, so fanden wir in §. 20, daß Tang. $< A =$

$$\frac{\text{Sin.} < \text{B}}{\text{Sin. BA. Cot. BC} - \text{Cos. AB Cos. B}};$$

folglich Tang. A. (Sin. AB. Cot. BC — Cos. AB. Cos. B) = Sin. B.

[Nun

Nun aber ist nach §. 3 Tang. A $=$ $\frac{1}{\text{Cot. A}}$, also

$$\frac{\text{Sin. AB. Cot. BC} - \text{Cos. BA Cos. B}}{\text{Sin. B}} =$$

Cot. A, und da $\frac{\text{Cos. B}}{\text{Sin. B}} = \text{Cot. B}$, so ist

$$\frac{\text{Sin AB. Cot. BC}}{\text{Sin. B}} - \text{Cos. AB. Cot. B} =$$

Cot. A.

Zusatz 1.

Läßt man das Perpendikel aus B auf AC fallen, so darf man nur AC statt AB und $<$ C statt $<$ B setzen, so ist Cot. A $=$

$$\frac{\text{Sin. AC. Cot. BC}}{\text{Sin.} < \text{C}} - \text{Cos. AC. Cot. C.}$$

Zusatz 2.

Verwechselt man AC mit BC und $<$ A mit $<$ B, so erhält man

Cot.

$\text{Cot. B} = \frac{\text{Sin. AB. Cot. AC}}{\text{Sin. A}} - \text{Cos. AB},$

Cot. A, und $\text{Cot. B} = \frac{\text{Sin. BC. Cot. AC}}{\text{Sin. C}}$

$- \text{Cos. BC. Cot. C}$; aus der 2ten Formel für Cot. A.

Zusatz 3.

Will man die Formeln für den $< C$ haben, so verwechselt man bloß in der Formel des 1. Zusatzes $< A$ in $< C$ und BC in AB, welches giebt

$\text{Cot.} < C = \frac{\text{S. AC. Cot. AB}}{\text{Sin. A}} - \text{Cos. AC}$

Cot. A.

Zusatz 4.

Zieht man das Perpendikel aus A auf BC, so setze man in der Formel des 3. Zusatzes bloß BC statt AC und statt A den $<$ B, so erhält man $\text{Cot.} < C =$

$\frac{\text{S. BC. Cot. AB}}{\text{Sin. B}} - \text{Cos. BC. Cot. B}$.

§. 23.

§. 23.

Wenn man wiederum, wie vorher, in fig. 7 den Polardreieck des Dreiecks ABC beschreibt, so hat man

$$\mathrm{Cot.}\ a = \mathrm{Cot.}\ AB,$$

$$\mathrm{Cot.}\ b = \mathrm{Cot.}\ BC$$

und $\mathrm{Cot.}\ c = \mathrm{Cot.}\ AC$. Nun aber ist nach §. 22.

$$\mathrm{Cot.}\ a \left\{ \begin{array}{l} = \dfrac{\mathrm{Sin.\ ab.\ Cot.\ bc}}{\mathrm{Sin.\ b}} - \mathrm{Cos.\ ab.\ Cot.\ b} \\[2ex] = \dfrac{\mathrm{Sin.\ ac.\ Cot.\ bc}}{\mathrm{Sin.\ c}} - \mathrm{Cos.\ ac.\ Cot.\ c}, \end{array} \right.$$

dies ist

$$\mathrm{Cot.}\ AB \left\{ \begin{array}{l} = \dfrac{\mathrm{S.\ B.\ Cot.\ C}}{\mathrm{Sin.\ BC}} - \mathrm{Cos.\ B.\ Cot.\ BC} \\[2ex] = \dfrac{\mathrm{S.\ A.\ Cot.\ C}}{\mathrm{Sin.\ A\ C}} - \mathrm{Cos.\ A.\ Cot.\ AC} \end{array} \right.$$

Auf die nemliche Art findet man auch

$$\mathrm{Cot.}\ BC \left\{ \begin{array}{l} = \dfrac{\mathrm{Sin.\ C.\ Cot.\ A}}{\mathrm{Sin.\ AC}} - \mathrm{Cos.\ C.\ Cot.\ AC} \\[2ex] = \dfrac{\mathrm{S.\ B.\ Cot.\ A}}{\mathrm{S.\ AB}} - \mathrm{Cos.\ B.\ Cot.\ AB}, \end{array} \right.$$

und ebenfalls

Cot.

$$\text{Cot. AC} \begin{cases} = \dfrac{\text{S. A. Cot. B}}{\text{S. AB}} - \text{Cos. A. Cot. AB.} \\ = \dfrac{\text{S. C. Cot. B}}{\text{S. BC}} - \text{Cos. C. Cot. BC.} \end{cases}$$

§. 24.

Wenn in fig. 4 die drey Seiten des $\triangle$ ABC gegeben sind, so findet man den $<$ A also:

Man setze AB — AC $=$ A und BC $=$ B, so ist $\frac{1}{2}$ B $+$ $\frac{1}{2}$ A $=$ $\frac{1}{2}$ AB — $\frac{1}{2}$ AC $+$ $\frac{1}{2}$ BC und $\frac{1}{2}$ C — $\frac{1}{2}$ A $=$ $\frac{1}{2}$ BC — $\frac{1}{2}$ AB $+$ $\frac{1}{2}$ AC. Substituirt man nun in §. 11. der Trigonometrischen Functionen diese Werthe in

Cos. B — Cos. A $=$ 2 Sin. $\frac{1}{2}$ (A $+$ B). Sin. $\frac{1}{2}$ (A — B), so erhält man Cos. BC — Cos. (AB — AC) $=$ 2 Sin. ($\frac{1}{2}$ AB — $\frac{1}{2}$ AC $+$ $\frac{1}{2}$ BC) $\times$ Sin. ($\frac{1}{2}$ BC — $\frac{1}{2}$ AB $+$ $\frac{1}{2}$ AC). Ferner hat man nach §. 8 der Functionen 2 (Sin. $\frac{1}{2}$ A)^2

$=$

$= 1 - \text{Cos.}\, A$, u. da $1 = \dfrac{\text{Sin. AB. S. AC}}{\text{Sin. AB. S. AC}}$,

so ist auch $2 .\, \text{Sin.} \tfrac{1}{2} A^2 = \dfrac{\text{Sin. AB. S. AC}}{\text{Sin. AB. S. AC}}$. — Cos. A; ebenfalls ist nach §. 17.

$$\frac{\text{Cos. BC} - \text{Cos. AB. Cos. AC}}{\text{Sin. AB. Sin. AC}} = \text{Cos. A},$$

dies substituirt giebt $2\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\ A^2 =$

$$\frac{\text{S. AB. S. AC} + \text{Cos. AB. Cos. AC} - \text{Cos. BC}}{\text{Sin. AB. Sin. AC}}$$

Nun aber ist nach §. 6. No. 4. Sin. AB. Sin. AC + Cos. AB. Cos. AC = Cos. (AB — AC), also $2\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\ A)^2 =$ $\dfrac{\text{Cos.}(AB - AC) - \text{Cos. BC}}{\text{Sin. AB} \times \text{Sin. AC}}$; folglich auch $2\ \text{Sin.} \tfrac{1}{2} A^2) = 2\ \text{Sin.} (\tfrac{1}{2} AB - \tfrac{1}{2} AC + \tfrac{1}{2} BC) \times \text{Sin.} (\tfrac{1}{2} BC - \tfrac{1}{2} AB + \tfrac{1}{2} AC)$, oder $(\text{Sin.} \tfrac{1}{2} A)^2 = \text{Sin.} (\tfrac{1}{2} AB - \tfrac{1}{2} AC + \tfrac{1}{2} BC) \times \text{Sin.} (\tfrac{1}{2} BC - \tfrac{1}{2} AB + \tfrac{1}{2} AC)$, oder auch $(\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\ A^2) = \text{Sin.} (\tfrac{2}{1} AB + \tfrac{1}{2} AC + \tfrac{1}{2} BC) - AC \times \text{Sin.}$

($\frac{1}{2}$ BC + $\frac{1}{2}$ AB + $\frac{1}{2}$ AC) — AB, welches die Formel ist, die man gewöhnlich in den Anleitungen zur Steuermannskunst ohne Beweis findet.

Dritter Abschnitt.

Von den kleinen Ab- oder Zunahmen der trigonometrischen Linien.

§. 25.

Aus den Anfangsgründen der Trigonometrie ist es schon bekannt, daß, wenn die Bogen, oder Winkel wachsen, auch die Sinusse, Tangenten und Secanten derselben zunehmen, die Cosinusse, Cotangenten und Cosecanten derselben aber abnehmen, vorausgesetzt, daß die Bogen unter 90° sind. Sind dieselben über 90°, so nehmen die Sinusse u. s. w. ab, die Cosinusse u. s. w. nehmen dann wieder zu.

§. 26.

Bedeutet also z irgend einen Bogen, oder Winkel, und bezeichnet man die kleine

Ab- oder Zunahme desselben mit dz, wo der Buchstab d keinen Factor, sondern bloß ein Zeichen der Veränderung, etwa das Zeichen $\sqrt{}$ vor einer Größe, anzeigen soll; so erwäge man, daß nach §. 6 N°. 1.

Sin. $(z + dz) =$ Sin. z. Cos. dz $+$ Sin. dz. Cos. z.

Da nun dz einen sehr kleinen Bogen bedeutet, so kann man diesen Bogen seinem Sinus gleich setzen, und der Cosinus desselben wird gleich dem Halbmesser $= 1$ seyn. Substituirt man diese Werthe so erhält man

Sin. $(z + dz) =$ Sin. $z \times 1 + dz$ $\times$ Cos. z, oder Sin. $(z + dz) =$ Sin. z $+ dz$. Cos. z, also Sin. $(z + dz) -$ Sin. $z = dz$. Cos. z. Wenn also der Bogen z um die Größe dz wächst, so ist der Sinus dieses Bogens um dz. Cos. z angewachsen. Dies pflegt man nun in der Differenzial-Rechnung also auszudrücken d. Sin. $z = dz$. Cos. z, dies ist, die

Ver-

Veränderung eines Sinus ist gleich der kleinen Veränderung des Bogens, multiplicirt durch den Cosinus des Bogens. Nimmt der Bogen ab, so erhält das Differenzial, oder die Abnahme ein negatives Zeichen.

§. 27.

Will man die Veränderung von Cosin. z finden, so nehme man an, daß z in z + dz übergehe, also Cos. z in Cos. (z + dz). Nun aber ist nach §. 6. No. 2. Cos. (z + dz) = Cos. z. Cos. dz — Sin. z. Sin. dz; da nun aber auch hier Cos. dz = 1 und Sin. dz = dz, so giebt dies substituirt Cos. (z + dz) = Cos. z — dz. Sin. z; folglich Cos. (z + dz) — Cos. z = — dz. Sin. z, oder d. Cos. z = — dz. Sin. z. Wenn also der Bogen z um dz wächst, so nimmt sein Cosinus um — dz. Sin. z ab.

§. 28.

Wenn x und y ein Paar veränderliche Größen bedeuten, z. B. die Sinusse und Cosinusse zweier Bogen, und man nimmt an, daß x um dx und y um dy anwachse, so ist es offenbar, daß ihre Summe $x + y$ um $dx + dy$ und ihr Unterschied $x - y$ um $dx - dy$ zunehmen muß. Eine Größe, welche keiner Veränderung unterworfen ist, so wie z. B. die Halbmesser eines und desselben Kreises, heißt eine beständige Größe, und ihre Veränderung ist $= 0$. Bedeutet also a eine solche beständige Größe, so ist $da = 0$.

§. 29.

Wenn man annimmt, daß in dem Producte xy die Größe x um dx und y um dy zunehme, so gehet das Product xy in $(x + dx). (y + dy)$ über, und die Zunahme desselben ist $(x + dx) (y + dy) -$ xy,

xy, oder entwickelt $xy + xdy + ydx + dxdy - xy$, also die ganze Zunahme $xdy + ydx + dxdy$. Bezeichnet man nun diese Veränderung mit dem Buchstaben d, so ist auch $d.(xy) = xdy + ydx + dxdy$. Die Veränderungen dx und dy mögen nun so groß, oder so klein seyn, als sie wollen, so muß diese Formel, wie man leicht sieht, stets ihre Richtigkeit haben. Nimmt man aber an, daß dx und dy äußerst kleine Zahlen sind, oder Brüche, deren Zähler der Einheit gleich, deren Nenner aber sehr große Zahlen sind, so kann das letzte Glied dxdy als eine Größe angesehen werden, die gegen ydx u. xdy verschwindet. Denn gesetzt, es wäre $x = 12$, $y = 15$, $dx = \frac{1}{1000000}$ und $dy = \frac{1}{100000}$, so wird $ydx + xdy + dxdy = \frac{15}{1000000} + \frac{12}{100000} + \frac{1}{1{,}00000000000} = 0{,}000015 + 0{,}00012 + 0{,}00000000001$. Hier sieht man au-

gen-

genscheinlich, daß der letzte Bruch ganz füglich, seiner Kleinheit wegen, weggelassen werden kann.

§. 30.

Wenn man die Veränderung des Bruchs oder Quotienten $\frac{x}{y}$ suchen will, so verfahre man also. Man setze

$$\frac{x}{y} = z, \text{ also}$$

$$x = zy, \text{ und}$$

$$dx = d\,(zy), \text{ oder}$$

$$dx = ydz + zdy, \text{ nach §. 29,}$$

$$\text{und } dx - zdy = ydz,$$

$\frac{dx - zdy}{y} = dz.$ Nun für z seinen Werth $\frac{x}{y}$ substituirt, ist $\frac{dx - \frac{xdy}{y}}{y} = d.$ $\frac{x}{y}$ oder $\frac{ydx - xdy}{yy} = d.\ \frac{x}{y}.$

§. 31.

§. 31.

Wenn in dem Producte xy die $x = y$ ist, so wird $d(xx) = xdx + xdx = 2xdx$ seyn. Hat man ein Product, das aus drey veränderlichen Factoren bestehet, z. B. xyz, dessen Veränderung gesucht werden soll, so setze man $yz = v$, also hat man $d(xyz) = d(xv)$ und $d.xv = xdv + vdx$. Nun aber ist $dv = d(yz) = ydz + zdy$, substituirt man nun für dv und v ihre Werthe, so erhält man $d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx$. Ist nun wieder $x = y = z$, so erhält man $d(x^3) = 3x^2dx$.

§. 32.

Wenn in einer Bruchgröße $\frac{x}{y}$ der Zähler x beständig, oder $= a$ ist, so wird $d.\frac{a}{y} = \frac{yda - ady}{y^2} = \frac{o - ady}{y^2} = \frac{-ady}{y^2}$, also hier die Veränderung negativ.

§. 33.

Diese wenigen Erläuterungen, die Veränderung der Größen betreffend, werden uns dienen, um die kleinen Veränderungen der Tangenten, Secanten u. s. f., wenn die denselben zugehörigen Bogen wachsen, zu bestimmen. Wir wollen bey der Tangente anfangen. Der Bogen mag z heißen, so ist nach §. 3. Tang. z $=$ $\frac{\text{Sin. } z}{\text{Cos. } z}$, also auch d. Tang. z $=$ d $\left(\frac{\text{Sin. } z}{\text{Cos. } z}\right)$. Nun aber ist nach §. 30. d $\left(\frac{\text{Sin. } z}{\text{Cos. } z}\right) = \frac{\text{Cos. } z \text{d. Sin. } z - \text{Sin. } z \text{. d. Cos. } z\text{.}}{\text{Cos. } z^2}$

Aber nach §. 26. ist d Sin. z $=$ dz. Cos. z, und nach §. 27. ist d. Cos. z $=$ $-$ dz. Sin. z. Substituirt man nun diese beiden Werthe, so ist d. $\left(\frac{\text{Sin. } z}{\text{Cos. } z}\right) =$

$dz \left(\frac{Cos. z^2 + Sin. z^2}{Cos. z^2}\right)$, aber $Sin. z^2 + Cos. z^2 = 1$. nach §. 2, also ist

$d\left(\frac{Sin. z}{Cos. z}\right)$, oder $d. Tang. z = \frac{dz}{Cos. z^2}$.

§. 34.

Weil nach §. 3. $Cot. z = \frac{Cos. z}{Sin. z}$,

so ist auch $d. Cot. z = d\left(\frac{Cos. z}{Sin. z}\right)$. Nun

ist aber nach §. 30. $d\left(\frac{Cos. z}{Sin. z}\right)$

$$= \frac{Sin. z d : Cos. z - Cos. z. d. Sin. z}{Sin. z^2}$$

oder $d. \left(\frac{Cos. z}{Sin. z}\right) =$

$-dz \left(\frac{Cos. z^2 + Sin. z^2}{Sin. z^2}\right)$, oder

$$d\left(\frac{Cos. z}{Sin. z}\right) = \frac{-dz}{Sin. z^2} = d. Cot. z.$$

§. 35.

§. 35.

Da, nach §. 3. Secant $z = \frac{1}{\text{Cos. } z}$, so ist auch d. Sec. $z = d\left[\frac{1}{\text{Cos. } z}\right]$. Nun ist aber nach §. 32. $d\left[\frac{1}{\text{Cos. } z}\right] =$

$$\frac{-\text{d. Cos. } z}{\text{Cos. } z^2} = \frac{dz\ \text{Sin. } z}{\text{Cos. } z^2} = \frac{dz\ \text{Sin. } z}{\text{Cos. } z} \cdot \frac{1}{\text{Cos. } z}.$$

Da aber $\frac{\text{Sin. } z}{\text{Cos. } z} = \text{Tang. } z$ und $\frac{1}{\text{Cos. } z} = \text{Sec. } z$, so ist $d\left[\frac{1}{\text{Cos. } z}\right]$ oder d (Sec. z) = dz Tang. z. Secant z.

§. 36.

Da Cosec. $z = \frac{1}{\text{Sin. } z}$, so ist auch d. Cosec. $z = d\left[\frac{1}{\text{Sin. } z}\right] = \frac{-\text{d. Sin. } z}{\text{Sin. } z^2}$

$$= \frac{-dz\ \text{Cos. } z}{\text{Sin. } z^2} = \frac{-dz\ \text{Cos. } z}{\text{Sin. } z} \cdot \frac{1}{\text{Sin. } z}.$$

Da

Da nun aber $\frac{\text{Cos. } z}{\text{Sin. } z} = \text{Cot. } z$ und $\frac{1}{\text{Sin. } z} =$ Cosecant z, so ist auch d. Cosecant z = — dz. Cotang. z. Cosecant. z.

Anwendung des Vorhergehenden auf die Veränderungen der Seiten und Winkel der Kugeldreyecke.

---

§. 37.

Bezeichnet man in fig. 4 die Seiten des Kugeldreyecks ABC mit den Buchstaben a, b und c, nemlich BC mit a, AC mit b und AB mit c und die Winkel desselben mit den großen Buchstaben, die an den Spitzen derselben stehen, und bleibt dann die Seite b mit dem anliegenden < A unveränderlich, so findet man das Verhältniß der Veränderungen der übrigen Stücke des Dreyecks folgendermaßen.

1) Um die Veränderung der beiden Seiten a und c zu finden.

Nach

Nach §. 17. war Cos. A $= \frac{\text{Cos. BC} - \text{Cos. AC. Cos. AB}}{\text{Sin. AC. Sin. AB}}$, welches, nach abgekürzter Bezeichnung Cos. A $= \frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b. Cos. c}}{\text{Sin. b. Sin. c}}$ giebt, oder Cos. A. Sin. b. Sin. c $=$ Cos. a — Cos. b. Cos. c, dies durch Sin. c dividirt, und für $\frac{\text{Cos. c}}{\text{Sin. c}} =$ Cotang. c gesetzt, giebt Cos. A. Sin. b $= \frac{\text{Cos. a}}{\text{Sin. c}}$ — Cos. b. Cot. c. Wenn diese Formel nach §. 30 u. s. w. differenzirt oder verändert wird, so hat das Glied linker Hand, oder Cos. A Sin. b keine Veränderung, weil diese beiden Theile im Dreieck als unveränderlich angenommen worden, die Veränderung des andern Gliedes aber ist

$$0 = \frac{\text{Sin. c. d. Cos. a} - \text{Cos. a. d. Sin. c}}{\text{Sin. c}^2}$$

—

— Cos. b. d. Cot. c = Sin. c. d. Cos. a — Cos. a. d. Sin. c — Cos. b Sin. c^2. d. Cot. c. Nun aber ist d. Cos. a = — da. Sin. a. §. 27. d. Sin. c = dc. Cos. c. §. 26. und d. Cot. c = $\frac{-\,dc}{\text{Sin. } c^2}$. §. 34. Substituirt man diese Werthe, so ist o = — Sin. c. Sin. a. da — Cos. a. Cos. c dc + Cos. b Sin. c^2. $\frac{dc}{\text{Sin. } c^2}$ oder o = — Sin. c. S. a. da — Cos. a. Cos. c. dc + Cos. b × dc, also Sin. c. S. a. da = (Cos. b — Cos. a. Cos. c) dc, und da = $\frac{\text{Cos. b} - \text{Cos. a. Cos. c}}{\text{Sin. c. S. a}}$. dc. Nun aber ist $\frac{\text{Cos. b} - \text{Cos. a. Cos. c}}{\text{Sin. c. Sin. a}}$ = Cos. B nach §. 17. Zusatz 2; folgl. da = Cos. B. dc.

2) Um

2) Um die Veränderung der andern Winkel B und C zu finden, verfährt man also:

Nach §. 17 Zusatz 2 fanden wir, daß Cos.

$$AC = \text{Cos. } b = \frac{\text{Cos. } B + \text{Cos. } A. \text{ Cos. } C}{\text{Sin. } A. \text{ Sin. } C},$$

woraus denn folgt, daß auch Cos. b. Sin. A. Sin. C = Cos. B + Cos. A. Cos. C; dividirt man durch Sin. C und setzt wiederum für $\frac{\text{Cos. } C}{\text{Sin. } C}$ bloß Cotang. C, so ist

$$\text{Cos. } b. \text{ Sin. } A = \frac{\text{Cos. } B}{\text{Sin. } C} + \text{Cos. } A.$$

Cot. C, also, da b und A beständige Grössen sind, wenn man differenziirt

$$o = \frac{\text{Sin. } C. d. \text{ Cos. } B - \text{Cos. } B. d. \text{ Sin. } C}{\text{Sin. } C^2}$$

$$- \frac{dC}{\text{Sin. } C^2}. \text{ Cos. } A \text{ oder } o = \text{Sin. } C.$$

$$- dB \text{ Sin. } B - \text{Cos. } B. \ dC. \text{ Cos. } C$$

$$- dC$$

— dC. Cos. A; also — dB =
$\frac{\text{Cos. A} + \text{Cos. B. Cos. C}}{\text{Sin. B. Sin. C.}}$. dC. Aber
nach §. 19 ist Cos. a = Cos. BC =
$\frac{\text{Cos. A} + \text{Cos. B. Cos. C}}{\text{Sin. B. Sin. C}}$; folgl. — dB
= Cos. a. dC.

3) Die Veränderung der Seite a und des < B zu finden, verfahre man also:

Nach §. 15 hat man Sin. b. Sin. A = Sin. a. Sin B. Da nun b und A beständige Grössen sind, so ist, wenn man diese Gleichung differenzirt o = Sin. a. dB. Cos. B + Sin. B. da. Cos. a, also — dB Cos. B. Sin. a = Sin. B. da Cos. a, und — dB = $\frac{\text{Sin. B. da. Cos. a}}{\text{Sin. a. Cos. B.}}$

Da nun $\frac{\text{Cos. a}}{\text{Sin. a}}$ = Cot. a und $\frac{\text{Sin. B}}{\text{Cos. B}}$ = Tang. B, so ist — dB = Tang. B. Cot. a. da.

4) Um die Veränderungen der Seite a und des Winkels C zu finden, verfahre man folgendermassen:

Man setze die in N°. 2 und 3 gefundenen Werthe von — dB einander gleich, so ist Tang. B. Cot. a. da = Cos. a. dC. Nun ist aber $\frac{\text{Cos. a}}{\text{Sin. a}}$ = Cot. a nach §. 3, also Tang. B. $\frac{\text{Cos. a. da}}{\text{Sin. a}}$ = Cos. a. dC, oder $\frac{\text{Tang. B. da}}{\text{Sin. a}}$ = dC, und endlich $\frac{\text{Tang. B}}{\text{Sin. a}} = \frac{dC}{da}$.

5) Um die Veränderungen der Seite c und des Winkels B zu finden, verfährt man also:

Aus N°. 3 ist — dB = Tang. B. Cot. a. da, = Tang. B. da. $\frac{1}{\text{Tang. a}}$, und

daher

daher — dB. Tang. a = Tang. B. da,

folglich $da = \frac{-dB.\ Tang.\ a}{Tang.\ B} = Cos.\ B.$ dc (aus N°. 1) oder — dB. Tang. a = dc. Sin. B; weil Tang. B. Cos. B = Sin. B (§. 3), und daher

$$\frac{-dB}{dc} = \frac{Sin.\ B}{Tang.\ a}.$$

6) Um die Veränderungen der Seite c und des Winkels C zu finden, hat man aus N°. 4. $da = \frac{Sin.\ a}{Tang.\ B}.\ dC = Cos.$ B. dc (aus N°. 1); folglich auch $\frac{dC}{dc} =$

$$\frac{Cos.\ B.\ Tang.\ B}{Sin.\ a} = \frac{Sin.\ B}{Sin.\ a}.$$

§. 38.

Wenn in fig. 4. der Winkel A und die demselben gegenüberliegende Seite a unverändert oder beständig bleiben, das Verhältniß der Veränderungen der übrigen Stücke des Kugeldreyecks ABC zu bestimmen.

N°. 1. Um die Veränderung der Seite c und des derselben gegenüberliegenden Winkels C zu bestimmen, verfahre man also:

Nach §. 15. hat man $\frac{\text{Sin. } A}{\text{Sin. } a} = \frac{\text{Sin. } C}{\text{Sin. } c}$. Da hier nun das erste Glied der Gleichung unveränderlich ist, so hat man, wenn dieselbe differenziirt wird, $o = \frac{\text{Sin. c. d Sin. C} - \text{Sin. C. d. Sin. c}}{\text{Sin. } c^2}$, oder $o = \text{Sin. c. dC. Cos. C} - \text{Sin. C Cos. c. dc}$, also $\text{dc. Sin. C. Cos. c} = \text{Sin. c. dC Cos. C}$, oder $dc = \frac{\text{Sin. c}}{\text{Cos. c}} \cdot \frac{\text{Cos. C}}{\text{Sin. C}} dC$; folglich $dc = \text{Tang. c. Cot. C} = \frac{\text{Tang. c}}{\text{Tang. C}} dC$.

N°. 2. Die Veränderung der Seite b und des gegenüberliegenden Winkels B zu finden, verfährt man also: Nach §. 15. ist wiederum $\frac{\text{Sin. A}}{\text{Sin. a}} = \frac{\text{Sin. B}}{\text{Sin. b}}$. Differenziirt man, wie vorher, so ist o =

$$\frac{\text{Sin. b. d. Sin. B} - \text{Sin. B. d. Sin. b}}{\text{Sin. b}^2}$$

oder o = Sin. b. Cos. B. dB — Sin. B Cos. b. db, also Sin. B. Cos. b. db = Sin. b. Cos. B. dB, oder db = $\frac{\text{Sin. b}}{\text{Cos. b}}$. $\frac{\text{Cos. B}}{\text{Sin. B}}$. dB, oder db = Tang. b. Cot. B. dB = $\frac{\text{Tang. b}}{\text{Tang. B}}$. dB.

N°. 3. Die Veränderungen der beiden andern Winkel B und C findet man also:

Nach §. 18. ist Cos. A = Cos. a Sin. B. Sin. C — Cos. B. Cos. C, differenziirt man diese Gleichung, so ist o =

Cos.

Cos. a (Sin. B. dC. Cos. C + Sin. C dB. Cos. B) + Cos. B. dC. Sin. C + Cos. C. dB. Sin. B, oder auch $o = dB$ (Cos. a. Sin. C. Cos. B + Cos. C. Sin. B) + dC

$$\frac{(\text{Cos. a. Sin. B. Cos. C} + \text{Cos. B. Sin. C}}{\text{Sin. B. Sin. C}}:$$

folglich $- dB$ (Cos. a. Cot. B + Cot. C) $= dC$ (Cos. a Cot. C + Cot. B).

Nun ist nach §. 22. Zusatz 4.

$$\text{Cot. C} = \frac{\text{Sin. a. Cot. c}}{\text{Sin. B}} - \text{Cos. a. Cot. B}$$

$$\text{und Cot. B} = \frac{\text{Sin. a. Cot. b}}{\text{Sin. C}} - \text{Cos. a.}$$

Cot. C (nach §. 22. Zusatz 2.)

folglich hat man, wenn das gemeinschaftliche Sin. a weggelassen, und für Cot. c und Cot. b ihre Werthe $\frac{\text{Cos. c}}{\text{Sin. c}}$ und $\frac{\text{Cos. b}}{\text{Sin. b}}$ gesetzt werden

—

$$-dB \frac{\text{Cos. } c}{\text{Sin. } c. \text{Sin. } B} = \frac{dC. \text{Cos. } b}{\text{Sin. } b. \text{Sin. } C.}$$

Da nun endlich nach §. 15. Sin. c. Sin. B = Sin. b. Sin. C, so ist auch

$$-dB \text{ Cos. } c = dC. \text{Cos. } b,$$

oder $\frac{-dB}{dC} = \frac{\text{Cos. } b}{\text{Cos. } c}$.

N°. 4. Die Veränderungen des Winkels C und der Seite b zu finden, verfahre man folgendermaßen. Aus N°. 2. und 3. hat man $\frac{-dC. \text{Cos. } b}{\text{Cos. } c} = \frac{db. \text{Tang. } B}{\text{Tang. } b}$,

also auch $\frac{-dC}{db} = \frac{\text{Tang. } B. \text{Cos. } c}{\text{Tang. } b. \text{Cos. } b}$

oder $\frac{-dC}{db} = \frac{\text{Tang. } B. \text{Cos. } c}{\text{Sin. } b}$.

N°. 5. Die Veränderungen der beiden Seiten b und c zu finden, setze man aus

N°.

$$N^o.\ 4.\ dC = \frac{-db.\ \text{Tang. } B.\ \text{Cos. } c}{\text{Sin. } b},$$

und da aus $N^o.\ 1.\ dc = \frac{\text{Tang. } c}{\text{Tang. } C} dC$, so ist $dC = dc.\ \frac{\text{Tang. } C}{\text{Tang. } c}$; folglich einander gleich gesetzt $\frac{dc.\ \text{Tang. } C}{\text{Tang. } c} = \frac{-db.\ \text{Tang. } B.\ \text{Cos. } c}{\text{Sin. } b}$, und daher $-db.$ $\frac{\text{Sin. } B.\ \text{Sin. } c}{\text{Cos. } B} = dc\ \frac{\text{Sin. } C.\ \text{Sin. } b}{\text{Cos. } C}$, woraus, wie vorher, dann die Formel $\frac{-db}{dc} = \frac{\text{Cos. } B}{\text{Cos. } C}$ entspringt.

§. 39.

Wenn die Seiten b und c im $\triangle$ ABC fig. 4 beständig bleiben, um die Veränderung der übrigen Stücke des Kugeldreyecks zu bestimmen, nemlich:

N°. 1. Die Veränderung der Seite a und des gegenüberliegenden Winkels A.

Nach §. 18. wurde gefunden Cos. a = Cos. b. Cos. c + Sin. b. Sin. c. Cos. A. Differenziirt man nun diese Gleichung, so erhält man

$$-\,da\ \mathrm{Sin.}\ a = -\,dA.\ \mathrm{Sin.}\ A.\ \mathrm{Sin.}\ b.$$

Sin. c, also $dA = \dfrac{\mathrm{Sin.}\ a}{\mathrm{Sin.}\ b.\ \mathrm{Sin.}\ c.\ \mathrm{Sin.}\ A}.$ da. Da aber Sin. b. Sin. A = Sin. B. Sin. a und ebenfalls Sin. B. Sin. c = Sin. b. Sin. C, so so ist auch $dA = \dfrac{da}{\mathrm{Sin.}\ B.\ \mathrm{Sin.}\ c} = \dfrac{da}{\mathrm{Sin.}\ b.\ \mathrm{Sin.}\ C}$, oder

$$\frac{dA}{da} = \frac{1}{\mathrm{Sin.}\ B.\ \mathrm{Sin.}\ c} = \frac{1}{\mathrm{Sin.}\ b.\ \mathrm{Sin.}\ C}.$$

N°. 2. Um die Veränderung der Winkel B und C zu finden, differenziire man $\dfrac{\mathrm{Sin.}\ b}{\mathrm{Sin.}\ c} = \dfrac{\mathrm{Sin.}\ B}{\mathrm{Sin.}\ C}$, so ist o = Sin. C.

dB.

$dB. Cos. B - Sin. B. dC. Cos. C$, also $Sin. B. dC. Cos. C = Sin. C. dB. Cos. B$, dividirt man hier durch $Cos. B. Cos. C$, so ist $dC\ Tang. B = dB.\ Tang. C$.

No. 3. Die Veränderung der beiden Winkel A und B zu bestimmen, differenziire man die Gleichung

$Sin. a. Sin. B = Sin. b. Sin. A$, so erhält man $da. Cos. a. Sin. B + dB\ Cos. B\ Sin. a = dA\ Cos. A. Sin. b$, und $dB. Cos. B. Sin. a = dA. Cos. A. Sin. b - da. Cos. a\ Sin. B$. Nun ist aus No. 1. $da = dA. Sin. b. Sin. C$, also $dB. Cos. B. Sin. a = dA. Cos. A. Sin. b - dA\ Sin. b. Sin. C\ Cos. a. Sin. B$, oder $dB. Cos. B. Sin. a = dA\ Sin. b\ (Cos. A - Cos. a. Sin. B. Sin. C.)$

Nun aber ist nach §. 18. $Cos. A = S. C. S. B. Cos. BC + Cos. C. Cos. B$, also $Cos. A - Cos. a. Sin. B. Sin. C = - Cos. B. Cos. C$ und dies substituirt, giebt

dB.

dB. Cos. B. Sin. a = dA. Sin. b — Cos. B. Cos. C und durch Cos. B dividirt dB. Sin. a = — dA. Sin. b. Cos. C, daher also $\frac{- dA}{dB} = \frac{\text{Sin. a}}{\text{Sin. b. Cos. C}}$.

No. 4. Um die Veränderung der beiden Winkel A und C zu finden, verwechsele man nur gehörig die Buchstaben der Seiten und Winkel, so erhält man

$$\frac{- dA}{dC} = \frac{\text{Sin. a.}}{\text{Sin. c. Cos. B}}.$$

No. 5. Um die Veränderung der Seite a und des Winkels B zu finden, hat man

aus No. 1 $- dA = \frac{- da}{\text{Sin. b. Sin. C}}$

aus No. 3 $- dA = \frac{\text{dB Sin. a}}{\text{Sin. b. Cos. C}}$; also

$$- da = \frac{\text{dB Sin. a. Sin. b. Cos. C}}{\text{Sin. b. Cos. C}} =$$

dB. Sin. a. Tang. C.

No. 6.

N°. 6. Um die Veränderung der Seite a und des Winkels C zu finden, verfährt man mit N°. 2 und 5, wie so eben geschehen, und man erhält die Formel

$$\frac{-da}{dC} = \text{Sin. a. Tang. B.}$$

§. 40.

Es bleiben zwey Winkel B und C unverändert, um das Verhältniß der Veränderungen der übrigen Stücke des Kugeldreiecks zu finden.

Man kann bloß in den Formeln des vorigen §. für die Seiten und Winkel, im Polar-Dreyecke fig. 7. die Supplemente der gegenüberstehenden Winkel und Seiten setzen. Die Differenzialien dieser verwechselten Seiten und Winkel werden entgegengesetzt, wie ihre Tangenten und Cosinusse.

Auf diese Art erhält man folgende 6 Formeln:

No. 1. $\frac{da}{dA} = \frac{1}{\text{Sin. b. Sin. C}} = \frac{1}{\text{Sin. c. Sin. B.}}$

2. $\frac{db}{dc} = \frac{\text{Tang. b}}{\text{Tang. c}}$

3. $\frac{da}{db} = \frac{\text{Sin. A}}{\text{Sin. B. Cos. c}} = \frac{\text{Sin. a}}{\text{Sin. b. Cos. c}}$

4. $\frac{da}{dc} = \frac{\text{Sin. A}}{\text{Sin. C. Cos. b}} = \frac{\text{Sin. a}}{\text{Sin. c. Cos. b}}$

5. $\frac{dA}{db} = \text{Sin. A. Tang. c.}$

6. $\frac{dA}{dc} = \text{Sin. A. Tang. b.}$

Vierter Abschnitt.
Von der Anwendung dieser Formeln.

§. 41.

Gesetzt man soll aus der Horizontal-Parallaxis eines Gestirns finden, welchen Einfluß die Parallaxis für eine gewisse Höhe auf die Declination und Rectascension haben muß. Es sey in Fig. 8. HZR der Meridian eines Orts, dessen Scheitelpunct Z, Entfernung vom Pole PZ, an welchem ein Gestirn in s beobachtet werde, dessen wahrer Ort S ist. Das Complement der scheinbaren Declination ist Ps, der Unterschied der wahren und scheinbaren Declination ist die Parallaxis der Declination. Der $<$ SPs ist der Unterschied zwischen der wahren und scheinbaren Rectascension,

sion, oder die Parallaxe derselben. In dem Kugeldreiecke ZPS ist die Seite ZP und der $<$ PZS beständig, und man findet die Veränderung des $<$ P, oder den $<$ SPs nach §. 37. Zusatz 6. nach der Formel $\frac{dC}{dc} = \frac{\text{Sin. B}}{\text{Sin. a}}$, wo d. C $=$ dZPS, dc $=$ d. ZS, C $=$ P, a $=$ SP, B $=$ S; also $\frac{\text{d. ZPS}}{\text{d. ZS}} = \frac{\text{Sin. ZSP}}{\text{Sin. SP}}$.

Nun ist aber nach §. 15 $\frac{\text{Sin. ZPS. Sin. ZP}}{\text{Sin. Zs}}$ $=$ Sin. ZSP, und substituirt man für die Höhenparallaxis dZs ihren bekannten Werth durch die Horizontal-Parallaxis ausgedrückt, nemlich horizont. Parallaxe $\times$ Sin. ZS, so erhält man $\frac{\text{d. ZPS}}{\text{Hor. Par. Sin. ZS}}$

$= \frac{\text{Sin. ZPS. Sin. ZP}}{\text{Sin. ZS. Sin. SP}}$, und daher

$$\text{d. ZPS} = \frac{\text{Hor. Par. Sin. ZPS. Sin. ZP}}{\text{Sin. SP}},$$

oder

oder die Parallaxis der graden Aufsteigung ist gleich der Horizontal-Parallaxe multiplicirt durch den Sinus der scheinbaren Entfernung vom Meridiane, multiplicirt durch den Cosinus der Polhöhe, dividirt durch den Cosinus der scheinbaren Declination.

Ferner ist nach §. 37. No. 1. da = Cos. B. dc, oder hier d. PS = dZs. Cos. PSZ. Wenn man aber d. Ps, oder die Parallaxe der Declination durch PZ, PS und < ZPS ausdrücken will, so setze man für Cos. PSZ erst Cot. PSZ. Sin. PSZ

$$= \frac{\text{Cot. PSZ. Sin. ZP. Sin. ZPS}}{\text{Sin. ZS}}, \text{ und}$$

da ferner nach §. 22 mit Abänderung der dortigen Buchstaben

$$\text{Cotang. PSZ} = \frac{\text{Sin. PS. Cot. ZP}}{\text{Sin. ZPS}} -$$

Cos. PS. Cot. ZPS, so ist, wenn man gehörig substituirt Cos. PSZ =

(Sin

$$\left(\frac{\text{S. PS. Cos. PZ} - \text{Cos. PS. Cos. ZPS. S. ZP}}{\text{Sin. ZS}}\right).$$

Setzt man nun statt dZs den Werth Hor. Par. Sin. ZS in dem Ausdrucke d. ZS Cosin. PSZ = d. PS, so erhält man Parall. Decl. = Hor. Par. (Cos. Decl. Sin. Polhöhe — Sin. Declin. Cos. scheinbare Entfernung vom Meridian. Cos. Polhöhe).

§. 42.

Um den Irthum, der in der Bestimmung der Breite durch einen Irthum, den man in der Höhenmessung begangen, veranlaßt wird, zu bestimmen.

So bald man drey Stücke in dem Kugeldreiecke SPZ Fig. 8 kennet, so lassen sich die andern alle daraus bestimmen. Man nehme nun an, daß man drey davon bestimmt habe, wovon zwey scharf und genau bestimmt sind, und daß die dritte Seite ZS, oder der Abstand des Gestirns

Zenith, gleich dem Complement der Höhe desselben einem bekannten Irthume unterwürfig sey, so frägt es sich, was dieser für einen Irthum in der Breite verursachen kann. Wir wollen annehmen, daß man mit der Höhe den Zeitwinkel ZPS und das Complement der Declination SP gebraucht habe. Weil diese beiden letzten Stücke als unveränderlich angenommen sind, so kömmt es darauf an, das Differenzial-Verhältniß der Seiten ZS und ZP, oder dZS : dZP zu finden. Nun ist aber nach §. 37. N°. 1. da = Cos. B. dc, welches in unserm $\triangle$ ZSP ausgedrückt, dZS = Cos. PZS. dZP, oder in ein Verhältniß gebracht dZS : dZP = Cos. PZS : 1 giebt. Woraus ferner folgt, daß der Irthum in der Breite stets größer ist, als der Irthum in der gemessenen Höhe; weil in dem Verhältnisse Cos. PZS : 1 der Radius, oder 1 > Cos. PZS ist; und daß er im Meridiane am kleinsten

sten seyn muß, wo er genau dem Irthume in der gemessenen Höhe gleich ist. Hieraus sieht man deutlich, daß die Mittagshöhen, oder doch diejenigen, die ihr am nächsten sind, die vortheilhaftesten zur Bestimmung der Breite seyn müssen. Gesetzt der Azimutal-Winkel PZS sey $= 140°$ und der Irthum in der gemessenen Höhe 4 Minuten $= 240''$, so hat man um dZP zu finden

$$\frac{\text{dZS. Rad.}}{\text{Cos. PZS}} = \text{dZP}, \text{ also}$$

$$\begin{array}{lr} \text{Log. } 240 = & 2.38021 \\ \text{Log. Rad.} = & 1.000000 \\ \hline & 1.238021 \\ \text{Log. Cos. } 140° - & 988425 \\ \hline & 2,49596 \text{ Log. von } 313'' \end{array}$$

$= 5'13''$. Wenn man also einen Irthum von 4. in der gemessenen Höhe begehet, so irret man um $5'13''$ in der Bestimmung der Breite.

§. 43.

Um den Irrthum zu bestimmen, den ein Fehler in der Zeit, da man die Höhe gemessen, auf die Bestimmung der Breite haben kann.

Wenn man die Sonnenhöhe gemessen, so ist ZPS fig. 8 der Zeitwinkel; hat man aber eine Sternhöhe gemessen, so giebt die Tageszeit den Abstand der Sonne vom Meridian, und der Unterschied der graden Aufsteigung der Sonne und des Sterns giebt die Entfernung des Sterns von der Sonne, woraus man denn leicht den Stundenwinkel ZPS des Sterns findet.

Wir wollen nun annehmen, daß die Höhe ganz genau gemessen, so ist es sehr leicht, vermittelst des Abstandes des Gestirns vom Pole PS, vom Scheitelpuncte ZS und des Zeitwinkels ZPS die Breite, oder das Complement derselben ZP zu finden. Wenn man sich nun aber in dem Zeitwinwinkel ZPS geirret, und den Einfluß dieses Irthums auf die Breite bestimmen will, so sind im △ ZPS die Seiten ZS und PS beständig, und man hat nach §. 39. No. 6 $\frac{-da}{dC}$ = Sin. a. Tang. B, oder in unserm Dreiecke in ein Verhältniß gebracht dPZ : — dZPS = Sin. PZ × Tang. PZS : R^2. Aus welchem Verhältnisse man deutlich siehet, daß der Irthum in der Breite kleiner ist, als derjenige im Zeitwinkel, so lange das Azimuth, oder < PZS < 45° ist. Wenn aber das Azimuth größer, als 45° wird, so nimmt der Irthum in der Breite immer zu, dergestalt, daß der Irthum in der Breite denjenigen im Zeitwinkel sehr übertreffen kann, und zwar um so mehr, je mehr sich das Azimuth der Größe von 90° nähert; und da der Irthum in der Zeit schon im Stundenwinkel einen Irthum verursachet, der im Bogen

15mal

15mal größer ist; so folgt hieraus, daß man durch den Zeitwinkel die Breite nicht anders bestimmen müsse, als, wenn gar keine andre Mittel mehr übrig sind. Ferner, da der Irthum in der Breite einen Irthum im Zeitwinkel verursachet, der um desto kleiner ist, je mehr sich das Azimuth der Größe von 90° nähert: so ist der vortheilhafteste Augenblick, um den Zeitwinkel zu bestimmen, derjenige, wenn das Gestirn durch den ersten Vertical gehet, oder doch nahe dabey ist.

Fünf

Fünfter Abschnitt.

Allgemeiner Begriff der Meereslänge, nebst der Methode, dieselbe durch den Abstand des Mondes von der Sonne, oder von den Sternen zu bestimmen.

§. 44.

Länge eines Orts nennt man den Abstand desselben von einem andern Orte, von welchem man die Graden der Länge zu zählen anfängt, unter der Voraussetzung nemlich, daß dieser Abstand recht östlich, oder westlich gerechnet werde. Der Ort, von welchem man zu zählen anfängt, ist ganz gleichgültig. Die Holländer, denen unsre deutschen Seefahrer von jeher gefolgt sind, fangen von dem Berge Pico, der auf einer der Canarischen Inseln liegt, ihre Graden der Länge zu zählen, an.

§. 45.

Um dies mit mehrerer Deutlichkeit einsehn zu können, sey nach der 9ten Figur PWpOP die halbe Oberfläche der Erde; P und p die Pole derselben, C der Mittelpunkt, Pp die Axe. WDO sey ein Stück des Aequators, POp, PDp, PWp sind Cirkels, die sich in den Polen vereinigen, senkrecht auf dem Aequator stehn, und Meridiane oder Mittags-Kreise genannt werden, weil es an allen Oertern, die unter einem dieser Kreise liegen, Mittag ist, wenn die Sonne in demselben stehet. Man sezze nun, daß der Cirkel PTp über die Insel Teneriffa gehe, und daß er also der erste Meridian sey, von dem man die Grade zu zählen anfängt, denn liegen alle diese Cirkel, PDp, POp, PWp, die durch den Nordund Süd-Pol P und p gehen, recht nach Süden und Norden, und folglich werden alle diese Cirkel, so wie FNA, GTM, WDO, deren Flächen auf den Flächen der ersten Kreise senkrecht stehen, recht Ost und West liegen. Da aber die Fläche des Aequators senkrecht auf allen Mittagskreisen steht, so müssen auch alle andre Flächen, die senkrecht auf den Mittags-Kreisen stehen, dem Aequator gleichlaufend seyn, und also ebenfalls recht Ost und West liegen.

Weil nun die Länge gleich dem Abstand zweier Oerter, die recht Ost und West von einander liegen, so folgt auch, daß die Länge auf einem Bogen muß gezählet werden, der recht Ost und West liegt; dies ist, auf einem Bogen, der entweder dem Aequator parallel, oder der Aequator selbst ist.

§. 46.

Wenn man nun frägt, auf welcher Länge der Ort E liegt, das ist, welchen Abstand, recht Ost oder West gezählet, er von dem ersten Meridian PTp habe; so muß man aus E auf den Meridian PTp einen Bogen EL mit dem Aequator parallel ziehen, denn zeigt dieser Bogen an, um wie viel der Ort E recht Ost oder West von dem Meridian von Teneriffa liegt.

§. 47.

Es ist aber einerley, ob man den Bogen EL, AN, MT, oder OD nimmt, denn sie sind alle einander parallel, und drücken alle die Neigung aus, die die Flächen PTpP, PEOpP, die durch die Pole, den Meridian und durch die Oerter T und E gehen, zu einander haben; dies ist, sie sind das Maaß der Winkel DCO, TUM oder NVA, die einerley

nerley Größe haben, und folglich einerley Gradzahl enthalten müssen.

§. 48.

Aus diesem Grunde nimmt man zur Bestimmung dieses Winkels, oder zur Bestimmung der Länge den Bogen DO, der auf dem Aequator durch oben benannte Mittags-Kreise eingeschlossen wird; und man giebt folgende Bestimmung der Länge: Die Länge eines Orts ist der Bogen des Aequators, der zwischen dem Meridian des Orts und dem ersten angenommenen Meridian eingeschlossen ist. So zeigt der Bogen DO die Länge aller Oerter an, die unter dem Meridian POp liegen; und DW die Länge der Oerter, die unter dem Meridian PWp liegen.

§. 49.

Man ist also gewohnt, die Länge von einem bestimmten Meridian nach Osten oder Westen, in Graden und Minuten zu zählen. Einige pflegen immer Ostwärts den ganzen Cirkel durch, oder bis auf 360 Grad zu zählen. Andre, und vorzüglich die Engländer, zählen Ost- und Westwärts bis auf 180 Grad. Man setze, daß der Bogen DO = 20 Grad und WD = 30 Grad sey; denn sagt man, daß O 20 Grad Ostwärts von D liegt, und W 30 Grad Westwärts, oder welches einerley, 330 Grad Grad Ostwärts davon; denn man sieht leicht, daß dann noch 30 Grad vom Umkreise des Cirkels fehlen, und diese 30 Grad sind genau das Maaß des Bogens WD.

Diese beiden Methoden, nemlich: wenn man immer Ostwärts bis 360 Grad, oder Ost- und Westwärts bis auf 180 Grad zählet, haben jede ihren Nutzen und ihre Unbebequemlichkeit. Doch, es würde unnütze seyn, bey einer Sache zu verweilen, die im Grunde immer einerley ist. Wir wollen also lieber zur Beantwortung der Frage übergehn: Was ist Länge in Zeit?

§. 50.

Da die Erde in 24 Stunden sich um ihre Axe dreht, und also dadurch die Sonne in einer scheinbaren täglichen Bewegung von 24 Stunden sich um die Erde zu bewegen scheint, oder den ganzen Umkreis derselben, nemlich 360° durchläuft: so muß sie in einer Stunde den 24sten Theil von 360 Graden, das ist 15 Graden durchlaufen: Und deswegen, wenn sie zu einer bestimmten Zeit in dem Mittags-Kreise PD ist, muß sie schon eine Stunde und zwanzig Minuten früher in dem Mittags-Kreise PO, der 20 Grad Ostwärts vom Erstern liegt, gewesen seyn; und sie wird erst nach zwey

Stun-

Stunden an den Mittags-Kreis PWp, der 30 Grad Westwärts liegt, kommen. Man kann also die Länge nicht allein durch die Größe der Bogen OD, DW, in Graden ausdrücken, sondern auch durch den Unterschied der Zeit, nemlich: man braucht nur anzuzeigen, um wie viel der eine Ort, im nemlichen Augenblick, früher oder später seine Stunden zählt, als der andre; und wenn man diese Zeit in Graden verwandelt, erhält man den Unterschied der Länge derselben.

§. 51.

Man weiß also den Unterschied der Länge zweier Oerter, wenn man den Unterschied der Zeit weiß, der im nämlichen Augenblick an beiden Oertern gezählet wird, und die Bestimmung der Länge kömmt also blos darauf an: Daß, wenn man weiß, wie spät es am Schiffe, oder an dem Orte, wo man sich befindet, sey, man bestimmen könne, wie spät es, entweder unter dem ersten Meridian, oder an einem Orte, dessen Länge vom ersten Meridian bekannt ist, sey. Wenn man z. B. 3 Uhr am Schiffe zählet, und zugleich weiß, daß unter dem Pico 5 Uhr gezählet wird, so zählet man am letzten Orte 2 Stunden später, und der erste Meridian oder der Pico liegt 30 Grad Ostwärts vom Schiffe.

§. 52.

Die ganze Methode also, um die Länge auf der See zu bestimmen, besteht aus folgenden beiden Stücken: 1) Daß man wisse, wie spät es zu einer bestimmten Zeit am Schiffe, oder an dem Orte, wo man sich befindet, sey: 2) Daß man im nemlichen Augenblick bestimmen könne, wie

spät

spät es an einem andern bekannten Orte, z. E. zu London, Paris oder unter dem ersten Meridian sey.

Das erste Stück, nemlich die Bestimmung der Zeit am Schiffe, ist eine Aufgabe, deren Auflösung keinem Seefahrer schwer fallen kann. Wenn man die Breite des Schiffs, nebst der Abweichung der Sonne und ihre Höhe weiß, so findet man sehr leicht durch die Auflösung eines sphärischen Dreiecks, worin alle 3 Seiten gegeben, den sogenannten Zeit-Winkel, welcher die wahre Zeit am Schiffe im Momente der Beobachtung anzeigt.

Das zweite dazu erforderliche Stück, nemlich: Daß man an einem bestimmten Orte im nemlichen Augenblick, wenn man am Schiffe die Beobachtung anstellen will, die Tageszeit bestimmen könne, ist nicht so leicht, oder scheint wenigstens nicht so

leicht

leicht in die Augen zu fallen. Wir werden dies letztre also, so gut wie möglich, zu erklären suchen.

§. 53.

Man hat zwey verschiedene Mittel angegeben, wodurch diese verlangte Zeit kann bestimmt werden. Das erste besteht in einer, ohngeachtet aller heftigen, unregelmäßigen Bewegungen des Schiffes, richtig gehenden See-Uhr. Denn, man setze, daß man eine solche gute See-Uhr am Bord des Schiffes habe, die, wo man auch immer seyn mag, keine Unregelmäßigkeit in ihrem Gange zeigt: man setze, sage ich, daß diese Uhr, ehe man aus einem bekannten Hafen, z. E. aus Bremen seegelt, nach dem wahren Mittag daselbst gestellet sey; denn muß diese Uhr, wo man sich auch auf dem weiten Ocean befinden mag, immer genau die Tageszeit zu Bremen anzeigen: Denn es macht hier gar keinen Unterschied, ob die Uhr in Bremen geblieben, oder nach einem andern Ort gebracht ist, sie muß darum eben so richtig gehen, als wenn sie zu Bremen geblieben wäre. Wenn man denn die Zeit, welche die Uhr anzeigt mit derjenigen, die man am Schiffe durch Beobachtung erhält, vergleichet, so weiß man dadurch sogleich den Unterschied der Länge des Schiffes von Bremen, und folglich da die Länge von Bremen bestimmt ist, auch diejenige vom ersten Meridian *).

§. 54.

*) Ich muß hier bemerken, daß die Zeit, welche die See-Uhr angiebt, eigentlich nicht die wahre, sondern die mittlere Zeit ist, die erst durch eine Tabelle der Zeitgleichung (aequatio temporis) zur wahren muß reduciret werden. Man kann hier-

§. 54.

Dies wäre also gewiß, ohne Widerspruch, das bequemste Mittel, wodurch der Seefahrer die Meereslänge bestimmen könnte. Der einzige Zweifel, der noch übrig bliebe, würde den regelmäßigen Gang der Uhr betreffen; doch hierin hat man es schon so weit gebracht, daß Harrison, Arnold und Kendal in England und Berthoud und Le Roi in Frankreich dergleichen See-Uhren verfertiget haben, die man auf Seereisen geprüfet und richtig gefunden hat. — Schade ist es immer, daß

hierüber Herrn Röhls Einleitung in die Astronomischen Wissenschaften I Theil III Kapittel, und Herrn Pibo Steenstra's Grondbeginsels der Sterrekunde II Deel. III Boek, nachlesen.

daß dergleichen Werkzeuge für Kauffarthey-Schiffe zu kostbar, und für den größten Theil unsrer jetzigen Seefahrer außerdem, wegen der genauen Vorsicht, womit sie behandelt werden müssen, unbrauchbar sind.

§. 55.

Man hat aber noch ein zweites, zu diesem Endzwecke sehr dienliches, Mittel, welches von dergleichen Werkzeugen ganz unabhängig ist. Nemlich: wenn zwey Beobachter an verschiedenen Oertern eine und die nemliche Erscheinung am Himmel, die nur einen Augenblick die nemliche bleibt, zugleich beobachten, und jeder von ihnen die wahre Zeit, wenn er sie sieht, bemerket: so kann man wissen, wie spät es in diesem Augenblicke an beiden Oertern sey; und also auch, um wie viel es an dem einen Orte früher oder später, als an dem andern sey, und folglich den Unterschied der Länge beider

Oerter. Es kömmt also blos darauf an, um eine solche Erscheinung am Himmel aufzusuchen. Wir werden uns hier nicht mit der Erzählung aller der Methoden aufhalten können, die man, um die Länge auf dem Lande zu bestimmen, anwenden kann; doch müssen wir hier erinnern, daß die Beobachtungen des Anfangs und des Endes der Finsternissen, vorzüglich derjenigen des Mondes, nebst den Beobachtungen der Eclipsen der Jupiters Trabanten zu diesem Endzwecke sehr dienlich seyn können. Aber die Mondfinsternisse sind sehr selten, und die Eclipsen der Jupiters Trabanten sind, aus Mangel eines Fernrohrs von hinlänglicher Vergrößerungskraft, auf der See ganz unbrauchbar. Man muß sich also nach einer andern himmlischen Erscheinung umsehn: Und diese gesuchte Erscheinung wird keine andre seyn können, als der Abstand oder die Entfernung des

Mondes von der Sonne oder von den Sternen. Wir werden uns bemühen, dies deutlicher aus einander zu setzen.

§. 56.

Der Mond hat nicht allein mit dem ganzen Sternen-Himmel eine scheinbare tägliche Bewegung um die Erde; sondern außerdem noch eine wahre Bewegung in seiner Laufbahn, nach welcher er in 27 Tagen 7 Stunden 43′ 12″ seinen Lauf um die Erde vollbringt. Der Mond hat also, verglichen mit der täglichen Bewegung der Sterne, eine sehr schnelle Bewegung, nemlich ohngefähr 13° 10″ täglich; und also 33′ stündlich. — Auch verglichen mit der Bewegung der Sonne, die nur 2′ 33″ beträgt, ist die Bewegung des Mondes sehr schnell. — Hieraus folgt denn, daß der Mond nicht allein jeden Augenblick seinen Abstand von der Sonne oder von den Fixsternen verändert; sondern auch, daß diese Veränderung des Abstandes so schnell, und in einer kurzen Zeit so merklich ist, daß wir diese Veränderung mit unsern Instrumenten sehr gut beobachten können. Der Abstand des Mondes von der Sonne oder von den Fixsternen kann also füglich, als Mittel, um die Länge zu bestimmen, angesehen werden.

§. 57.

Nun wird aber ferner erfordert, daß diese himlische Erscheinung, im nemlichen Augenblicke, an beiden Orten, deren Unterschied der Länge man bestimmen will, beobachtet werde.

Daß man diesen Abstand des Mondes am Schiffe beobachten, und das Moment der Beobachtung wissen könne, fällt sehr leicht in die Augen: Denn es sey, nach fig. 10. KI der Horizont des Beobachters,

M

M der Ort des Mondes und Z der Ort der Sonne oder eines Fixsterns am Himmel; denn muß der Bogen MZ der Abstand zwischen der Sonne und dem Monde seyn; und dieser Abstand läßt sich durch einen Sextanten und, wenn der Abstand unter 90 Grad, auch durch einen Octanten, sehr leicht messen. Man kann ebenfalls die Zeit der Beobachtung sehr leicht bestimmen; denn da die Breite des Schiffes, entweder aus unmittelbarer Beobachtung oder aus dem Schiffs-Journale, hinlänglich genau bekannt ist; so kann man aus der Höhe der Sonne ZI den Zeitwinkel bestimmen, welches man auch bei'm Monde, wenn man seine Declination kennet, thun kann.

§. 59.

Eben so gut nun, als man diesen Abstand des Mondes am Schiffe messen kann, eben so leicht kann man denselben an irgend

einem

einem andern Ort der Welt, wo der Mond über dem Horizont sichtbar ist, beobachten. Aber dem Seefahrer, der in dem Augenblicke, wenn er seine Beobachtung macht, dieselbe mit der andern vergleichen muß, kann es wenig nützen, ob man diesen Abstand an einem andern Orte messe oder nicht, da er von dieser Beobachtung nicht das Geringste wissen kann.

Es scheint also beim ersten Anblicke, als ob die Beobachtung des Abstandes des Mondes von der Sonne oder von den Fixsternen zu unserm Endzwecke nicht dienen könnte; und dies aus Mangel einer Beobachtung, die an einem bekannten Orte im nemlichen Augenblicke mit derjenigen am Schiffe geschehen müsse. Allein diese Schwürigkeit wird, wenn man auf folgende Erklärung achten will, bald verschwinden.

§. 59.

§. 59.

Ob man an einem bekannten Orte, z. E. unter dem ersten Meridian einen bestimmten Abstand des Mondes von der Sonne oder von einem Stern, zu einer bestimmten Zeit, wirklich messe, oder ob man zuvor weis, zu welcher bestimmten Zeit des Tages dieser bestimmte Abstand an dem Orte statt haben wird, ist in der Ausübung einerley; wenn man nur Geschicklichkeit genug hat, um die Zeit mit der erforderlichen Genauigkeit vorher zu bestimmen. — Und diese ganze Geschicklichkeit hängt blos von einer hinlänglichen Kenntnis der Laufbahn des Mondes ab.

§. 60.

Es ist beinahe unglaublich, was für Mühe die neuern Astronomen angewendet haben, um die Gesetze für die Bewegung des Mondes zu entwickeln, und dafür genaue Tabellen zu berechnen. Der selige Professor Euler arbeitete mit unermüdetem Fleiße für das Erste, Tobias Majer, Professor zu Göttingen, für das Zweite, und Clairaut, ein großer französischer Mathematiker, für Beides. Man ist endlich so weit gekommen, daß man dem Schiffer genaue Verzeichnisse mitgeben kann, wo der Mond zu jeder Zeit, so wie sie an einem bekannten Ort gezählet wird, stehen muß; und dies Verzeichnis kann er als eine Uhr gebrauchen, die ihm allemal, wenn er den Mond beobachtet hat, zeiget, wie viel dann die Uhr an dem Orte ist, für welchen sein Verzeichnis berechnet ist. Wir wollen, um mehrerer Deutlichkeit willen, ehe wir diesen Gegenstand verlassen, noch ein Paar Worte über die Berechnung des Abstandes des Mondes von der Sonne oder von einem Fixsterne hinzufügen.

§. 61.

§. 61.

Wenn man die Gesetze der Bewegung des Mondes hinlänglich kennet, um seine Länge, Breite, grade Aufsteigung und Declination für jeden Augenblick genau bestimmen zu können: so kann es nicht schwer seyn, den wahren Abstand des Mondes von der Sonne oder von einem Fixsterne zu berechnen. Denn es sey zu diesem Endzwecke nach Fig. 11. ☉ die Sonne oder ein Stern, ☾ der Mond, EQ der Aequator, und P der Pol desselben. Man ziehe aus dem Pole P bis auf den Aequator, durch die Sonne und durch den Mond, die Bogen P ☉ I, P ☾ K, die beide Quadranten sind: und da ☉ I die Declination der Sonne, und ☾ K diejenige des Mondes ist; so müssen auch P ☉ und P ☾ die Complemente der Declination seyn. Wenn nun E den Anfangspunkt des Widders bedeutet, so so ist EI die grade Aufsteigung der Sonne oder des Sterns und EK diejenige des Mondes; und also ist der Bogen IK oder der < IPK, dessen Maaß er ist, gleich dem Unterschiede der graden Aufsteigungen. Man hat also einen sphärischen Dreieck, worin die Seiten ☉ P und P ☾ (Complemente der Declination) und der < ☉ P ☾ (Unterschied der graden Aufsteigungen) gegeben sind; und denn kann man nach den Regeln der sphärischen Trigonometrie den Dreieck auflösen, und den wahren Abstand ☉ ☾ finden. Will man aber statt der graden Aufsteigung und Declination, die Länge und Breite des Mondes gebrauchen; so ist EQ die Ekliptik, P der Pol derselben, und folglich ☉ I und ☾ K die Breiten, IK der Unterschied der Länge, und ☉ P, P ☾, Complemente der Breite: Und wenn man statt einem Sterne die Sonne selbst nimmt,

so

so wird die ☉ keine Breite haben, sondern sich in I befinden.

§. 62.

Nun hat man, wie schon gesagt, fast für jeden Tag den Abstand des Mondes, entweder von der Sonne oder von einem Fixsterne berechnet, und man findet ein Verzeichniß davon im Nautical Allmanac, im Allmanach ten Dienste der Zeelieden, im Hamburger Schiffer-Calender u. s. w., woselbst dieser Abstand von 3 Stunden zu 3 Stunden angezeichnet ist. Diese Tabellen dienen nun anstatt des zweiten Beobachters, und haben denselben Nutzen, als wenn man an den Oertern, wofür sie berechnet sind, wirkliche Beobachtungen anstellte.

§. 63.

Man hat also in der That in diesen Tabellen alles, was zur Bestimmung der

Länge nöthig ist, nemlich: Eine Erscheinung, die nur einen Augenblick unveränderlich bleibt, die auf dem Schiffe kann beobachtet werden, und von deren Beobachtung unter einem andern bekannten Meridiane der Seefahrer jederzeit Nachricht haben kann. Hieraus folgt denn endlich, daß, wenn man nach einer solchen Beobachtung die Tageszeiten weiß, wenn der nemliche Abstand, sowohl am Schiffe, als an dem Orte, wofür die Tabellen berechnet sind, einfällt, man auch sehr leicht aus diesem Unterschiede der Tageszeiten den Unterschied der Länge bestimmen könne.

§. 64.

Nun beobachtet man auf der See gewöhnlich die scheinbaren Höhen der Gestirne, deren Abstand man gemessen hat, und daher kennt man im △ MTZ Fig. 10. alle

alle drey Seiten, woraus man nach der Formel im §. 24 den < MTZ berechnet. Man addirt zu den Seiten MT und TZ die Refraction und subtrahirt die Parallaxis davon, wodurch man denn die wahren Abstände der Gestirne vom Scheitelpuncte mT und zT erhält, und da < MTZ = < mTz ist, so findet man daraus leicht den wahren Abstand der Gestirne mz. Da diese Methode aber langwierig und Kenntnisse der sphärischen Trigonometrie voraussetzt; so haben sich verschiedne Mathematiker bemühet, Formeln anzugeben, nach welchen der Seefahrer, ohne Kenntniß der sphärischen Trigonometrie, den wahren Abstand berechnen kann, von welchen wir die vorzüglichsten hier zu beweisen uns bemühen werden, und mit der Formel des Ritters Borda den Anfang machen.

§. 65.

§. 65.

Ehe wir zu dieser Erklärung übergehen können, müssen wir noch vorab eine Formel beweisen, deren sich der Ritter bedienet, und die sich sehr leicht aus dem Vorhergehenden ableiten läßt. Denn nach §. 18 war $\mathrm{Cos.}\,T = \frac{\mathrm{Cos.}\,MZ - \mathrm{Cos.}\,MT.\ \mathrm{Cos.}\,TZ}{\mathrm{Sin.}\,MT.\ \mathrm{Sin.}\,TZ}$, Fig. 10, also auch $1 + \mathrm{Cos.}\,T = 1 + \frac{\mathrm{Cos.}\,MZ - \mathrm{Cos.}\,MT.\ \mathrm{Cos.}\,TZ}{\mathrm{Sin.}\,MT.\ \mathrm{Sin.}\,TZ}$, oder $1 + \mathrm{Cos.}\,T =$

$$\frac{(\mathrm{S.}\,MT.\ \mathrm{S.}\,TZ - \mathrm{Cos.}\,MT.\ \mathrm{Cos.}\,TZ) + \mathrm{Cos.}\,MZ}{\mathrm{Sin.}\,MT.\ \mathrm{Sin.}\,TZ};$$

nun ist aber nach §. 6. N°. 2. $\mathrm{Sin.}\,MT.\ \mathrm{Sin.}\,TZ - \mathrm{Cos.}\,MT.\ \mathrm{Cos.}\,TZ = \mathrm{Cos.}\,(MT + TZ)$, also auch $1 + \mathrm{Cos.}\,T = \frac{\mathrm{Cos.}\,MZ + (\mathrm{Cos.}\,MZ + TZ)}{\mathrm{Sin.}\,MT.\ \mathrm{Sin.}\,TZ}$, oder nach §. 11. $1 + \mathrm{Cos.}\,T =$

$$\frac{2\,\mathfrak{S}.\,\frac{1}{2}(MZ + MT + TZ).\ \mathfrak{S}.\,\frac{1}{2}(MZ - MT - TZ)}{\mathfrak{Sin}.\ MT.\ \mathfrak{Sin}.\ TZ.}$$

und nach §. 8. Cos. $\frac{1}{2}$ T^2 =

$$\frac{\mathfrak{S}.\,\frac{1}{2}(MZ + MT + TZ).\ \mathfrak{S}.\,\frac{1}{2}(MZ - MT - TZ)}{\mathfrak{Sin}.\ MT.\ \mathfrak{Sin}.\ TZ.}$$

§. 66.

Der Beweis der Formel, deren sich de Borda bedienet, beruhet ganz auf der Berechnung des §. 64, nemlich auf der Auflösung der beiden Dreiecke MTZ und mTz Fig. 10, welche beide den < T gemeinschaftlich haben, welcher erst in dem △ MTZ gefunden wird, und dann zur Auflösung des △ mTz dienet. Aber, weil dieser Winkel beiden Dreiecken gemeinschaftlich ist, so hat man auch zwey Ausdrücke für denselben, nemlich in dem △ MTZ ist Cos. $\frac{1}{2}$ T^2 = Sin.

$$\frac{\left(\frac{MT + TZ + MZ}{2}\right).\ \mathfrak{S}.\left(\frac{MZ - TZ - MT}{2}\right.}{\mathfrak{Sin}.\ TZ.\ \mathfrak{Sin}.\ MT}$$

und

und in dem $\triangle$ mTz hat man Cos. $\frac{1}{2}$ T² =

$$\frac{S.\left(\frac{mT + Tz + mz}{2}\right) S.\left(\frac{mz - Tz - mT}{2}\right)}{\text{Sin. } Tz.\ \text{Sin. } mT}$$

(nach §. 65), welche Ausdrücke man einander gleich setzen kann; so daß man also dadurch erhält

$$\frac{S.\frac{1}{2}(MT + TZ + MZ).\ S.\frac{1}{2}(MZ - TZ - MT)}{\text{Sin. } TZ.\ \text{Sin. } MT.}$$

$$= \frac{S.\frac{1}{2}(mT + Tz + mz).\ S.\frac{1}{2}(mz - Tz - Tm)}{\text{Sin. } Tz\ \text{Sin. } mT},$$

welches eine Gleichung ist, aus welcher sich ein Werth des Bogens mz, oder des wahren Abstandes, der gesucht wird, ableiten lassen muß. Man setze zu diesem Endzwecke, der Abkürzung wegen, den scheinbaren Abstand MZ = a, die scheinbare Sonnenhöhe ZI = $\odot$, die scheinbare Mondhöhe MK = ☽, so folgt hieraus, daß TZ = TI — IZ = 90° — $\odot$, und TM = TK — MK = 90°

$-$ ☾; folgl. $\frac{MT + TZ + MZ}{2} =$
$\frac{90^\circ - ☾ + 90^\circ - ☉ + a}{2} = 90^\circ$
$- \frac{☾ + ☉ - a}{2}$, und daher auch
Sin. $\frac{1}{2}$ $(MT + TZ + MZ) =$ Sin.
$\left(90^\circ - \frac{☾ + ☉ - a}{2}\right) =$ Cos.
$\left(\frac{☾ + ☉ - a}{2}\right)$. Ebenfalls ist auch
$\frac{MZ - TZ - MT}{2} =$
$\frac{a - 90^\circ + ☉ - 90^\circ + ☾}{2} = - 90^\circ$
$+ \frac{a + ☉ + ☾}{2}$, also ebenfalls
S. $\frac{MZ - TZ - MT}{2} =$ Sin. $-$
$\left(90^\circ - \left(\frac{a + ☉ + ☾}{2}\right)\right) =$ Cos.

(a

$\left(\frac{a + \odot + \leftmoon}{2}\right)$. Ferner ist auch Sin. TZ $=$ Sin. $(90^\circ - \odot)$ $=$ Cos. $\odot$ und Sin. MT $=$ S. $(90^\circ - \leftmoon) =$ Cos. $\leftmoon$. Substituirt man dieses in dem Ausdrucke für Cos. $\frac{1}{2}$ T², (§. 66) so erhält man

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\ T^2 = \frac{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\ (\leftmoon + \odot - a).\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\ (\leftmoon + \odot + a)}{\text{Cos.}\ \odot.\ \text{Cos.}\ \leftmoon}.$$

Bezeichnet man in dem Dreiecke mTz den wahren Abstand mz mit A, die wahre Sonnenhöhe mit W$\odot$ und die wahre Mondhöhe mit W$\leftmoon$, so erhält man auf die nemliche Art im $\triangle$ mTz für Cos. $\frac{1}{2}$ T² den Werth

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\ T^2 = \frac{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\ (W\leftmoon + W\odot + A).\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\ (W\leftmoon + W\odot - A)}{\text{Cos.}\ W\odot.\ \text{Cos.}\ W\leftmoon}.$$

Da nun diese beiden Ausdrücke für Cosinus $\frac{1}{2}$ T² gleich sind, so hat man

$$\frac{\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,(☾ + \odot - a).\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,(☾ + \odot + a)}{\text{Cos.}\ ☾.\ \text{Cos.}\ \odot} =$$

$$\frac{\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,(W☾ + W\odot - A).\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,(W☾ + W\odot + A)}{\text{Cos.}\ W☾.\ \text{Cos.}\ W\odot.}$$, aus welcher Gleichung der Werth von A, oder des wahren Abstandes abgeleitet werden muß.

§. 67.

Wenn man das erste Glied dieser Gleichung unverändert läßt, die beiden Theile des letzten Gliedes aber näher betrachtet, so wird man bald finden, daß nach §. 6. N°. 2, wenn man $W☾ + W\odot = A$ dort und $B = A$ hier setzt, daß $\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,(W☾ + W\odot + A) = \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,(W☾ + W\odot).\ \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,A - \text{S.}\ \tfrac{1}{2}\,(W☾ + W\odot).\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\,A$, und $\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}$

(W☾ + W⊙ — A) = Cos. $\frac{1}{2}$ (W☾ + W⊙) × Cos. $\frac{1}{2}$ A + Sin. $\frac{1}{2}$
(W☾ + W⊙). Sin. $\frac{1}{2}$ A. Multiplicirt man nun diese beiden letzt gefund-
nen Gleichungen und bringt das Product auf den einfachsten Ausdruck, so
erhält man Cos. $\frac{1}{2}$ (W☾ + W⊙ — A). Cos. $\frac{1}{2}$ (W☾ + W⊙ + A)
= Cos. $\frac{1}{2}$ (W☾ + W⊙)^2. Cos. $\frac{1}{2}$ A^2 — Sin. $\frac{1}{2}$ (W☾ + W⊙)^2
× Sin. $\frac{1}{2}$ A^2, und da Cosin. $\frac{1}{2}$ A^2 = 1 — Sin. $\frac{1}{2}$ A^2, = Cos. $\frac{1}{2}$ (W☾
+ W⊙)^2 — Cos. $\frac{1}{2}$ (W☾ + W⊙)^2. S. $\frac{1}{2}$ A^2 + S. $\frac{1}{2}$ (W☾ +
W⊙)^2. S. $\frac{1}{2}$ A^2. Nun aber ist Cos. $\frac{1}{2}$ (W☾ + W⊙)^2 + S. $\frac{1}{2}$
(W☾ + W⊙)^2 = 1., also Cos. $\frac{1}{2}$ (W☾ + W⊙ — A) Cos. $\frac{1}{2}$ (W☾ +
W⊙ + A) = Cos. $\frac{1}{2}$ (W☾ + W⊙)^2 = S. $\frac{1}{2}$ A^2). Setzt man nun die-
sen letzten Ausdruck statt des zweiten Gliedes in die Gleichung des 66 §, so
erhält man $\dfrac{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\ (☾ + \odot - a).\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\ (☾ + \odot + a)}{\text{Cos.}\ ☽.\ \text{Cos.}\ \odot}$ =

$$\frac{\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\,(W\text{☾} + W\odot)^2 - \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\,A^2}{\text{Cos. } W\odot \,.\, \text{Cos. } W\text{☾}.}$$, woraus denn folgt

$$\frac{\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\,(\text{☾} + \odot - a)\,.\,\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\,(\text{☾} + \odot + a)\,.\,\text{Cos. } W\odot \,.\, \text{Cos. } W\text{☾}}{\text{Cos. ☽}\,.\,\text{Cos. } \odot}$$

$= (\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\,(W\text{☾} + W\odot)^2 - \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\,A^2)$ und daher $\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\,A^2 =$

$\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\,(W\text{☾} + W\odot)^2 -$

$$\frac{\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\,(\text{☾} + \odot - a)\,.\,\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\,(\text{☾} + \odot + a)\,.\,\text{Cos. } (W\odot \,.\, \text{Cos. } W\text{☾})}{\text{Cos. } \odot \,.\, \text{Cos. ☾}.}$$,

und wenn alles durch $\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\,(W\text{☾} + W\odot)^2$ dividirt und reducirt wird,

so hat man endlich $\dfrac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\,A^2}{\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\,(W\text{☾} + W\odot)^2} = 1 -$

$$\frac{\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\,(\text{☾} + \odot - a)\;\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\,(\text{☾} + \odot + a)\,.\,\text{Cos. } W\odot \,.\, \text{Cos. } W\text{☾}}{\text{Cos. } \odot \,.\, \text{Cos. ☾}\;(\text{Cos. } \tfrac{1}{2}\,(W\text{☾} + W\odot)^2}.$$

Diese Aufgabe ist also aufgelöset, indem man einen Werth für Sin. $\frac{1}{2}$ A^2 und also auch für Sin. A, also auch von A hat, welcher bloß durch die scheinbaren Höhen, durch den wahren und den scheinbaren Abstand ausgedrückt ist; da aber dieser Ausdruck in der Ausübung beschwerlich ist, so hat ihn de Borda folgendermaßen abgeändert. Da $\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}A^2}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(W\text{☾} + W\odot)^2}$ ein Quadrat ist, und daher stets positiv, so muß das zweite Glied $1 - \text{Cos.}\,\frac{1}{2}(\text{☾} + \odot + a)$ u. s. w. nothwendig auch positiv seyn, welches nicht anders möglich ist, als wenn der zweite Theil

$$\frac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(\text{☾} + \odot + a).\ \text{Cos.}\,\frac{1}{2}(\odot + \text{☾} - a)\ \text{Cos.}\,W\odot.\ \text{Cos.}\,W\text{☾}}{\text{Cos.}\,\odot.\ \text{Cos.}\,\text{☾}.\ \text{Cos.}\,\frac{1}{2}(W\text{☾} + W\odot)^2}$$

ein ächter Bruch ist, der kleiner, als die Einheit ist. Da nun die Sinusse ebenfals Brüche sind, so giebt es keinen Bruch, der nicht irgend einem Sinus ei:

nes Bogens gleich ist, oder dem Quadrate des Sinus eines Winkels. Man kann also sehr füglich den Bruch

$$\frac{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}(\leftmoon + \odot + a).\ \text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}(\leftmoon + \odot - a).\ \text{Cos.}\,W\leftmoon.\ \text{Cos.}\,W\odot}{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,(W\odot + W\leftmoon)^2.\ \text{Cos.}\,\odot.\ \text{Cos.}\,\leftmoon} =$$

Sin. G² setzen, und also $\frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,A^2}{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,(W\leftmoon + W\odot)^2} = 1 - \text{Sin.}\,G^2 = \text{Cos.}$ G²; folglich ist $\frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,A}{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,(W\leftmoon + W\odot)} = \text{Cos.}\,G$, und darum Sin. ½ A = Cos. ½ (W ⊙ + W ☾) Cos. G, welche beiden Ausdrücke die Formel von de Borda ausmachen, welche aus 2 Theilen besteht, nemlich aus:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}(\odot + \leftmoon + a).\ \text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}(\odot + \leftmoon - a).\ \text{Cos.}\,(W\leftmoon.\ \text{Cos.}\,W\odot)}{\text{Cos.}\,\odot.\ \text{Cos.}\,\leftmoon.}\right)}}{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,(W\odot + W\leftmoon)} = \text{Sin.}\,G,$$

welcher erste Theil eine Zahl giebt, die unter den Sinussen gesucht, den < G giebt, wovon man denn den Cosinus nimmt und den zweiten Theil Cos. $\frac{1}{2}$ (W ☉ + W ☾). Cos. G = Sin. $\frac{1}{2}$ A berechnet, woraus man den wahren Abstand A erhält.

Wenn man nun diese beiden Theile nach Logarithmen berechnet, und bedenkt, daß der Logarithmus einer Quadratwurzel die Hälfte des Logarithmus der Größe ist, die unter dem Wurzelzeichen stehet, so läßt sich die gesundne Formel also ausdrücken.

Man nehme von des

☾ scheinbarer Höhe Compl. Log. Cosinus ☉ scheinbarer Höhe Compl. Log. Cosinus und ☉ und ☾ scheinbarer Abstand	Dies sind die Größen im Nenner unter dem Wurzelzeichen.
Summe	

$\frac{1}{2}$ Summe . . . Log. Cos.

$\frac{1}{2}$ Summe.

$\frac{1}{2}$ Sum-

$\frac{1}{2}$ Summe — scheinb. Abstand Log. Cosin.	welches der Zähler des Bruchs unter dem Wurzelzeichen.
☾ wahrer Höhe ... Log. Cos.	
☉ wahrer Höhe ... Log. Cos.	

Die Summe aller ist der Log. des ganzen Bruchs, die halbe Summe ist der Log. der Wurzel dieses Bruchs.

☉ wahre Höhe
☾ wahre Höhe.

Summe

halbe Summe, davon den Log. Cos., welches der Logarithmus des Nenners außer dem Wurzelzeichen ist.

Der Unterschied zwischen dieser und obenstehender halben Summe ist der Log. Sin. G.

Nun suche man in den Tabellen unter den Log. Sinussen einen Winkel für G, und nehme dann Log. Cosin. G, addire dazu Log. Cos. $\frac{1}{2}$ (W ☉ + W ☾), so ist diese Sum-

Summe gleich Log. Sin. $\frac{1}{2}$ A; denn dieser Werth ist gleich dem Ausdrucke Sin. $\frac{1}{2}$ A = Cos. $\frac{1}{2}$ (W ☉ + W ☾). Cos. G, welches die Formel von de Borda ist, um aus dem scheinbaren Abstande den wahren herzuleiten.

In Worten ausgedrückt ist diese Regel folgende:

1. Man suche für der Sonne, oder eines Sterns scheinbare Höhe das Complement Log. Cosinus, welches einerley mit Log. Cosecans ist.
2. Man suche des Mondes scheinbarer Höhe Complement Log. Cosinus.
3. Man nehme den scheinbaren Abstand.
4. Man nehme die Summe dieser drey Zahlen, ebenfalls die halbe Summe derselben, und davon den Log. Cosinus.
5. Man nehme den Unterschied zwischen der halben Summe N°. 4 und dem schein-

scheinbaren Abstand N°. 3 und von dem Unterschied den Log. Cosinus.

6. Man nehme der Sonne, oder des Sterns Höhe und deren Log. Cosinus, so wie auch die wahre Mondes-Höhe und deren Log. Cosinus.

7. Man addire diese sechs Logarithmen, und nehme die Hälfte dieser Summe.

8. Man nehme die Summe der wahren Höhen N°. 6, ferner deren halbe Summe und davon den Log. Cosinus.

9. Man subtrahire den Logarithmus N°. 8. von der halben Summe der Logarithmen N°. 7 und suche dafür den Bogen G, wovon dieser Unterschied der Log. Sinus ist.

10. Man suche von diesem Bogen G den Log. Cosinus.

11. Addire zum Log. N°. 10. den Log. Cosinus der halben Summe der wahren

ren Höhen, die schon unter N°. 8. gebraucht sind.

12. Man suche den Bogen, wovon die Summe N°. 11. der Log. Sinus ist, welcher Bogen denn der halbe wahre Abstand ist.

13. Man nehme endlich das Doppelte dieses Bogens, so hat man den wahren Abstand.

Exempel in Zahlen.

☉ scheinbare Höhe 11°42′31′

Compl. Log. Cos. 0,0091320

☾ scheinbare Höhe 52°47′27′

Compl. Log. Cos. 0,2184410

☉ u. ☽ scheinb. Abstand 42°34′20′

Summe 107°4′18″

2) halbe Summe 53°32′9″ Log. Cos. 9740202

Unterschied mit ☉ und ☽ scheinbarem Abstande 10°57′49″ Log. Cos. 99920001

☉ wahre Höhe 11°38′4′ Log. Cos. 99909841

☾

☾ wahre Höhe 53°20′47″ Log. Cos. 97759567

Summe 64°58′51″	Summe 39,7605341
halbe Summe 32°29′26″	hlb. Sume 19,8802670
Log. Cos. halber Summe	— — 9.9260748

Unterschied 9.9541922

welches Log. Sin. von G, also G = 64°2′40″

Log. Cos. G = 9.6595899.

Log. Cos. halbe Sinus der

☉ und des ☾ wahrer Höhe = 9.9260748

Summe 9,5656647

welches der Log. Sinus von 21°34′58″

mult. durch 2

giebt den wahren Abstand 43°9′56″.

§. 68.

Die verkürzte Methode von Krafft läßt sich auch aus der Auflösung der beyden △ MTZ und mTZ fig. 10. ableiten. Da der < T in beyden Dreyecken gleich ist, so hat man nach §. 24. 1) $\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,T^2 = \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(MZ + TZ - MT).\,\text{S.}\frac{1}{2}(MZ - TZ - TM)}{\text{Sin. } TZ.\ \text{Sin. } MT}$

und

und auch im $\triangle$ mTZ 2) Sin. $\frac{1}{2}$ T² =

$$\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(mz+Tz-mT).\,\text{S.}\,\frac{1}{2}(mz-Tz-mT)}{\text{Sin. Tz. Sin. mT.}}.$$

Setzt man nun für MZ, TZ, MT, mz, Tz und mT die im 66 §. gebrauchten Zeichen, so erhält man

$$\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,(a+\odot-\text{☾}).\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,(a-(\odot-\text{☾}))}{\text{Cos.}\,\odot.\,\text{Cos.}\,\text{☾}} =$$

$$3)\ \frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,(A+W\odot-W\text{☾}).\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,(A-(W\odot-W\text{☾}))}{\text{Cos.}\,W\odot.\,\text{Cos.}\,W\text{☾}.}$$

oder auch

$$4)\ \text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,(A+W\odot-\text{☾}).\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,(A-(W\odot-W\text{☾} = \text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,(a+\odot-\text{☾}).\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,(a-(\odot-\text{☾})).\,\frac{\text{Cos.}\,W\odot.\text{Cos.}\,W\text{☾})}{\text{Cos.}\,\odot.\,\text{Cos.}\,\text{☾}}.$$

Da nun aber die wahre Sonnenhöhe kleiner, als die scheinbare, oder W☉ < ☉, so ist Cos. W☉ > Cos. ☉, und daher $\frac{\text{Cos. W☉}}{\text{Cos. ☉}} > 1$; allein da W☉ und ☉ nur wenig von einander verschieden sind, weil die horizontale Refraction nur 33′ ist, so muß $\frac{\text{Cos. W☉}}{\text{Cos. ☉}} < 2$ seyn, und also $\frac{\frac{1}{2}\ \text{Cos. W☉}}{\text{Cos. ☉}} < 1$, oder ein Bruch. Ebenso ist auch $\frac{\text{Cos. W☾}}{\text{Cos. ☾}}$ ein Bruch, weil Cos. W☾ < Cos. ☾, um desto mehr muß also $\frac{1}{2} \cdot \frac{\text{Cos. W☉}}{\text{Cos. ☉}} \cdot \frac{\text{Cos. W☾}}{\text{Cos. ☾}}$ ein Bruch seyn, und demnach kann der Werth dieses Bruchs durch irgend einen Cosinus vorgestellt werden. Man setze also

5) $\frac{1}{2} \cdot \frac{\text{Cos. W}\odot}{\text{Cos.}\,\odot} \cdot \frac{\text{Cos. W☾}}{\text{Cos. ☾}} = \text{Cos. p},$

und substituire in N°. 4. statt $\frac{\text{Cos. W}\odot}{\text{Cos.}\,\odot} \cdot \frac{\text{Cos. W☾}}{\text{Cos. ☾}}$ bloß 2 Cos. p, so erhält man

6) $\text{Sin.}\,\frac{(\text{A} + \text{W}\odot - \text{W☾})}{2} \cdot \text{Sin.}\,\frac{(\text{A} - (\overline{\text{W}\odot - \text{W☾}}))}{2} = \text{Sin.}\,\frac{(\text{a} + \odot - \text{☾})}{2} \cdot \text{Sin.}\,\frac{(\text{a} - \overline{\odot - \text{☾}})}{2} \cdot$

2 Cos. p, woraus denn nach §. 11. folgt

7) $(\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\text{A})^2 - \text{Sin.}\,\frac{1}{2}(\text{W}\odot - \text{W☾})^2 = (\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,\text{a})^2 - \text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,(\odot - \text{☾})^2 \cdot$ 2 Cos. p, und also

8) $(\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\text{A})^2 = \text{Sin.}\,\frac{1}{2}(\text{W}\odot - \text{W☾})^2 + (\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,\text{a}^2) - \text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,(\odot - \text{☾})^2$ 2 Cos. p, und nach §. 8.

9) $\text{Sin.}\,(\frac{1}{2}\text{A})^2 = \text{Sin.}\,\frac{1}{2}(\text{W}\odot - \text{W☾})^2$

+ Cos. p. Cos. (⊙ — ☽) — Cos. p. Cos. a, ebenso nach §. 10.

10. (Sin. $\frac{1}{2}$ A)^2 = Sin. (W⊙ — W☾)^2 + $\frac{1}{2}$ Cos. (⊙ — ☽ + p) + $\frac{1}{2}$ Cos. (⊙ — ☾ — p) — $\frac{1}{2}$ Cos. (a + p) — $\frac{1}{2}$ Cos. (a — p).

11. Nun ist stets nach §. 9. Cos. (⊙ — ☾ + p) — Cos. (a + p) = Sin. V. (a + p) — Sin. V. (⊙ — ☾ + p) Cos. (⊙ — ☾ — p) — Cos. (a — p) = Sin. V. (a — p) — S. V. (⊙ — ☾ — p) und weil W⊙ und W☾ < 90°, so ist Sin. $\left(\frac{\text{W⊙ — W☾}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ Sin. V. (W⊙ — W☾) und endlich auch (Sin. $\frac{1}{2}$ A)^2 = $\frac{1}{2}$ Sin. V. A (nach §. 9). Substituirt man diese Werthe in N°. 10, so ist

12. Sin. V. A = Sin. V. (W⊙ — W☾) + Sin. V. (a + p) + S. V.

$(a - p) - \text{Sin. V.} (\odot - ☽ + p)$
$+ \text{Sin. V.} (\odot - ☽ - p)$

Dieses ist die verkürzte Formel von Kraft. Bey der Anwendung derselben ist noch zu bemerken, daß, wenn die Zahl, welcher Sin. V. A gleich ist, größer, als der Radius, oder 1,000000 wird, dieses ein Zeichen ist, daß $A > 90°$ ist, und daß man also diese Zahl von dem doppelten Radio subtrahiren muß; weil Sin. V. $A = 2 -$ Sin. V. supl. A. Man hat Tabellen für Log. Cos. p berechnet, um den Seefahrer auch diese Mühe zu ersparen; allein dieser läßt sich sehr leicht aus den Tafeln nehmen.

§. 69.

Wir übergehen die Methoden von Maskelyne, Dunthorne, De Lambre, Fuss und andrer, theils, weil die meisten Hülfstafeln erfordern, theils, weil wir die-

diese, als Formulare für den Seefahrer hinlänglich halten, und er, wenn er diese verstanden, die übrigen in La Lande's Astronomie im 3ten Theile nachlesen kann. Wir wollen jetzt die Methode des Abts de la Caillé erklären, weil diese, nicht allein äusserst leicht, sondern auch den deutschen Seefahrern noch sehr wenig bekannt ist.

§. 70.

Um sich von dieser Methode einen deutlichen Begriff zu machen, sey in Fig. 12 ZN der Horizont, T der Scheitelpunct, HM die scheinbare Mondhöhe, hS die scheinbare Sonnenhöhe, oder auch Sternhöhe, so ist MS der scheinbare Abstand, welcher mit dem Instrumente gemessen worden. Ist nun aber HA die wahre Mondhöhe und hB die wahre Sternhöhe, so muß AB, der wahre Abstand derselben grö-

größer, als der scheinbare MS seyn, vorzüglich, wenn Mond und Stern beinahe einerley Höhe haben. Sind Mond und Stern beinahe in demselben Vertical-Kreise, so ist der Unterschied ihrer Refraction die Aequation ihres gemessenen Abstandes. Aber in allen andern Fällen müssen die Winkel bey M und S, welche die Vertical-Kreise am Monde und Sterne mit dem Bogen des Abstandes machen, berechnet werden. Ueberdem muß auch noch die Unrichtigkeit, die aus der Mond-Parallaxis entsteht, berichtigt werden, weil diese die scheinbare Höhe desselben vermindert, und folglich den gemessenen Abstand vergrößert. Um alles dieses deutlich einzusehen, sey in Fig. 13 T der Scheitelpunct, ZN der Horizont, HA die gemessene Mondhöhe, HB die gemessene Sternhöhe und AB der scheinbare Abstand. Ferner sey C der wahre Ort des Sterns, und man ziehe den Be-gen AC, beschreibe aus A, als Pol, mit AB den Bogen BD, dann sind die Winkel ABD und ADB beide rechte Winkel und AD = AB. Ist nun der < ABC stumpf, oder ABT scharf, so muß BD innerhalb C, auf AC fallen; wenn aber ABT stumpf ist, so fällt BD ausserhalb dem Punkte C, auf die Verlängerung von AC; folglich muß AB kleiner, als AC seyn, wenn der < ABT scharf ist, aber AB muß größer, als AC seyn, wenn < ABT stumpf ist; in beiden Fällen ist DC die Differenz, welche gesucht werden muß. Wenn man nun BD als einen Bogen eines größten Kreises betrachtet, so ist BDC ein rechtwinklichtes Kugeldreieck, in welchem die Hypothenuse BC, welche gleich der Erhöhung des Sterns, die durch die Refraction verursacht, gegeben ist, der < DBC ist das Complement des < ABT, weil ABD ein rechter Winkel ist. Also

ist

ist DC = Sin. BC. Sin. DBC; allein, wegen der Kleinheit der Bogen DC und BC können dieselben statt ihrer Sinusse gesetzt werden, und man hat DC = BC. Sin. DBC, oder DC = BC. Cos. ABT. Woraus sich denn ergiebt, daß die Aequation des Abstands des Sterns gleich dessen Refraction, multiplicirt mit dem Cosinus des < ABT, welche, wenn der < ABT scharf ist, zum gemeßnen Abstande AB addirt werden muß, aber davon subtrahirt, wenn der < ABT stumpf ist. Aus gleicher Ursache ist auch die Verbesserung, die bey dem Monde gemacht werden muß, gleich der Refraction des Mondes multiplicirt mit dem Cosinus des < BAT, welche, entweder zu AB addirt, oder davon subtrahirt werden muß, je nachdem der < BAC scharf oder stumpf ist. Ferner ist die Verbesserung, die noch bey dem Monde, seiner Parallaxis wegen, angegebracht werden muß, gleich dem Producte aus der Höhen-Parallaxis des Mondes, multiplicirt mit dem Cosinus des < BAT. Da nun aber die Höhen-Parallaxis gleich der Horizontal-Parallaxis multiplicirt mit dem Cosinus der Mondhöhe HA; so ist die Aequation, die beym Monde, seiner Parallaxis wegen, angebracht werden muß, gleich Horiz. Par. × Cos. HA × Cos. < TAB. Wir wollen, um dies alles deutlich zu zeigen, eine Aufgabe davon auflösen.

Aufgabe.

Gesetzt, jemand, der sich auf 32° 12′ nördlicher Breite, und nach seiner Muthmaßung auf 38° 30′ westlicher Länge von Paris befindet, mißt am 8ten Julius 1797 den Abstand des Regulus von dem erleuchteten Rande des Mondes, und findet denselben um 7 Uhr 45′ 57″ Abends gleich

47°

47° 56′, und in demselben Augenblick findet er die Höhe des Mondes gleich 34° 21′ und diejenige des Sterns gleich 18° 56′.

Man verlangt, erstens den wahren Abstand des Sterns vom Monde, und zweitens daraus die wahre Länge von Paris zu bestimmen.

Auflösung.

Wir nehmen hier an, daß die wahre Zeit der Beobachtung schon berichtiget, und die gemeßnen Höhen Mittelpunctshöhen sind.

Man suche die Winkel BAT und ABT also:

HA = 34° 21′, folglich AT = 55° 39′ — Log. 991677
Refraction 1′ 5″, AB = 47° 56′ — Log. 987062

10,78739.

KB = 18° 56′, also BT = 71° 4′

Refraction 2′ 8″ 174° 39′

2) 87° 19½′

erste Differenz	31° 41′	Log.	9.72034
zweite Diff.	39° 24′	Log.	9.80259
			2000000
			39.52293
			— 19.78739
		2)	19.73554
			9.86777,

welches Log. Sin. von 47° 31′ ist

also < BAT = 95° 2′

Nun hat man

S. BT : S. < BAT = S. AT : S. < ABT

9.91677
9.99832

19.91509
9.97584

9.93925 Log. Sin. von 60° 24′
= < ABT.

Ferner ist die Aequation des < ABT
2′8″ × Cos. < ABT

Cos.

Cos. ABT = 9.69368
Log. 2′8″ = 1.44716

1.14084 Log. von 1′4″.

Die Aequation des < A ist

Log. 1,5″ = 1,17609
Cos. < A = 8.94317

0,11926 Log. von 0′1″.

Die Aequation des < A für die Parallaxis ist

Horiz. Par. × Cos. A × Cos. HA,

Horiz. Par. 56′8″ Log. 3,52737
Cos. HA 9,91677
Cos. < BAT — 8.94317

2.38731 Log.

von 4′1″.

Um nun den gemessenen Abstand des Mondes vom Sterne zu verbessern, addire man zu

47° 56′, gemessenen Abstande
1′ 4 Verbesserung für den Stern.

47° 57′ 4″
0′ 1″ subt., weil $\angle$ BAT stumpf

bleibt 47° 57′ 3″
4′ 1″ Verbesserung der Parallaxis

also ist 48° 1′ 4″ der wahre Abstand.

Der wahre Abstand des Mondes vom Sterne Regulus war also 48° 1′ 4″, um 7 Uhr 45′ 57″ Abends, am Schiffe. Um nun zu finden, wie spät es in demselben Augenblicke zu Paris gewesen, suche man in den Mondtafeln der Commissance des Tems, oder in andern für Paris berechneten Tabellen einen gleichen Abstand, und man findet, daß am 8ten Julius, des Nachts um 12 Uhr der Abstand des Mondes vom Sterne Regulus

48° 59′ 1″ gewesen,
subt. 48° 1′ 4″ berechneter Abstand

giebt 57′ 7″ Unterschied. Nun war der

Abstand des Mondes vom Regulus 4 Stunden früher 46° 50′ 2″, folglich weicht der Mond in 4 Stunden 2° 8′ 9″ von dem Sterne ab, und man hat dies Verhältniß: 2° 8′ 9″ : 4 Stund. = 57′ 7″ : 1 Stund. 47′, welches die Zeit vor Mitternacht zu Paris ist, da der Mond denselben Abstand daselbst von Regulus hatte. Hieraus folgt denn, daß es 10 Uhr 13′ zu Paris gewesen, da es 7 Uhr 45′ 57″ am Schiffe war. Verwandelt man nun den Unterschied der Zeiten nemlich 2 Stunden 27′ 3″ in Grade, so erhält man 36° 45′ 45″ für den Unterschied der Länge beider Oerter, und hieraus folgt, daß die Beobachtung 36° 45′ 45″ westlich vom Meridiane von Paris geschehen sey.

Bestimmung der Länge durch Messung einer einzigen Mondhöhe.

§. 71.

Die einfache Messung der Höhe des Mondes, vermittelst welcher zu jeder Zeit der Stundenwinkel des Mondes bestimmt werden kann, ist Eins der, auf unsern Schiffen bis jetzt noch unangewandten Hülfsmitteln, aus welchem sich die Länge, ohne sehr weitläuftige Rechnung, äusserst gut bestimmen läßt. Wir wollen diese Methode durch folgende Erklärung zu erläutern suchen.

Es mögen zu diesem Endzwecke in Fig. 14 P und p die Pole des Gleichers, PLP und Plp die Mittagskreise zweyer Oerter, von welchen Plp der östlichste ist, PS und Ps zwey Bogen gröster Kreise seyn, welche durch die Pole des Gleichers und

und durch die Sonne gezogen sind, PM und Pm ebenfalls zwey gröste Kreise, welche durch die Pole des Gleichers und durch den Mond gehen, so sind die Winkel lPS und LPs die Stundenwinkel der Sonne, welche zugleich anzeigen, wie viel es an beiden Oertern noch vor, oder nach Mittage ist, und die Winkel lPM und LPm sind die Stundenwinkel des Mondes. Wenn nun beide Sonne und Mond sich an der Westseite beider Mittagskreise Plp und PLp befinden, und man annimmt, daß die Stundenwinkel der Sonne lPs und LPs einerley Größe haben, welches der Fall ist, wenn man an beiden Oertern einerley Stunden zählt; so muß der Stundenwinkel des Mondes LPm unter dem westlichen Mittagskreise PLp kleiner, als der Stundenwinkel lpM seyn, den der Mond mit dem östlichen Mittagskreise macht, nemlich, wenn beide an dem nämlichen Tage an beiden verschiednen Oertern untersucht werden; weil indeß der Mittagskreis PLp durch die tägliche Umdrehung der Erde um ihre Achse von Westen nach Osten, aus PLp nach Plp fortgerückt wird, der Mond ebenfalls in seiner eignen Bahn von Westen nach Osten fortrückend mit einer Schnellheit, die größer, als diejenige der Sonne ist, sich nach und nach Ostwärts von der Sonne entfernen muß. Oder, wenn der Mond in beiden Beobachtungen westlich von der Sonne steht, welches zwischen dem Voll- und Neumonde statt findet, so muß sich der Mond nach und nach der Sonne nähern, weswegen denn in beiden Fällen der Stundenwinkel des Mondes mPL an dem westlichen Mittagskreise PLp kleiner als der Stundenwinkel des Mondes MPl an dem östlichen Mittagskreise seyn muß. Dieser Unterschied der Stundenwinkel wird um

desto

desto größer seyn, je größer der Unterschied beider Mittagskreise ist; weil der Mond in jeder Stunde ohngefähr 2 Minuten in Zeit sich von der Sonne nach Osten entfernt. Wenn im Gegentheile der Mond östlich von beiden Mittagskreisen steht, so wird der Stundenwinkel desselben am westlichen Mittagskreise größer als am östlichen seyn.

Wenn also der Unterschied der Stundenwinkel des Mondes an dem nämlichen Tage, nach beiden verschiednen Mittagskreisen gerechnet, bekannt ist, so kann man den Unterschied beider Mittagskreise daraus ableiten, wenn man folgendes Verhältniß berechnet:

Des Mondes Entfernung von der Sonne in einer Stunde verhält sich zu einer Stunde Unterschied in Zeit, wie der gefundne Unterschied der Stundenwinkel des Mondes, zu dem Zeitunterschiede beider Mittagskreise.

Wenn man nun die wahre Zeit der Beobachtung weiß, und annimmt, daß die Declination des Mondes bekant ist, so kann man durch eine einzige Höhenmessung des Mondes den Stundenwinkel desselben für den Augenblick der Beobachtung auf dem Meere finden. Da man nun für den nemlichen Tag, Stunde und Minute den Stundenwinkel des Mondes zu Paris, London, oder Berlin berechnen kann; so folgt daraus, daß man durch eine einzige Höhenmessung des Mondes die Größe des Stundenwinkels des Mondes, an dem nemlichen Tage, zu gleichen Zeiten, auf dem Meere und in obenbenannten Städten bestimmen kann. Wenn nun diese Stundenwinkel auf dem Meere und zu Paris von einerley Größe sind,

so

so muß man nothwendig auf dem Meere unter demselben Mittagskreise seyn, unter welchem Paris liegt; wenn aber diese Winkel von verschiedner Größe sind, so läßt sich durch den Unterschied ihrer Größe, der Unterschied der Länge zwischen dem Mittagskreise von Paris und demjenigen des Orts, wo die Beobachtung geschehen, bestimmen. Wenn nemlich der Stundenwinkel, welcher durch Beobachtung gefunden, größer als der zu Paris ist, und der Mond westlich von den Mittagskreisen beider Oerter steht, so muß man sich östlich von Paris befinden. Wenn aber der Mond östlich von beiden Mittagskreisen steht, und der Stundenwinkel des Mondes an dem Orte der Beobachtung größer, als der zu Paris befunden, so ist man westlich von Paris. Der Fall muß umgekehrt seyn, wenn in beiden Fällen der

Stun-

Stundenwinkel kleiner als zu Paris gefunden wird.

Da es hier auf die genaue Bestimmung der Höhe des Mondes ankömmt, so müssen hier die vier Verbesserungen, von welchen die Mondhöhe abhängt, mit Sorgfalt angewendet werden, nämlich: 1) die Parallaxis, 2) die Strahlenbrechung, 3) die Senkung des Horizonts und 4) der Halbmesser des Mondes. Wenn man denn, vermöge dieser Verbesserungen, die wahre Mondhöhe erhalten, so ist, nach Fig. 15, PM das Complement der Mond-Declination, PT das Complement der Breite des Orts und TM das Complement der Mondhöhe, und folglich im Kugeldreieck TMP alle drey Seiten gegeben, woraus sich denn der Stundenwinkel des Mondes TPM leicht bestimmen läßt. Wenn man diesen Winkel gefunden hat, so muß man ver-

vermittelst guter astronomischer Tabellen die grade Aufsteigung des Mondes für den Mittagskreis von Paris, für die Stunde und Minute der Beobachtung suchen, und ferner den Stundenwinkel des Mondes für diese Zeit. Dann subtrahirt man den beobachteten und berechneten Stundenwinkel von einander, und die Zeit, in welcher dieser Unterschied von dem Monde durch seinen Vorlauf beschrieben wird, zeigt den Unterschied der Länge des Orts der Beobachtung von Paris an. Wir wollen dies durch ein Exempel erläutern.

Gesetzt, eine solche Beobachtung sey den 8ten Julius 1761, um 7 Uhr $42\frac{1}{2}$ Minuten geschehen, und nach Fig. 15 sey $PN = 32^\circ\,12'$, also $PT = 57^\circ\,48''$ die Mondhöhe $HM = 42^\circ\,36'$ $MT = 47^\circ\,24'$ die Declination DM $1^\circ\,47'$ $MP = 88^\circ\,13$, so ist nach der Be-

rech-

rechnung $< TPM = 38^\circ 40'$ gleich dem Stundenwinkel des Mondes.

Sucht man nun nach der Interpolations-Methode aus der Connaissance des tems die gerade Aufsteigung des Mondes, so findet man dieselbe

um 7 Uhr $42\frac{1}{2}' = 6$ Z. $3^\circ 45' 35''$
um 6 Uhr $42\frac{1}{2}' = 6$ Z. $3^\circ 16' 20''$

Also des Mondes stündlicher Lauf in grader Aufsteigung $29' 25''$.

Ferner findet man die gerade Aufsteigung der Sonne

Am 9 Jul. um 12 Uhr — 3 Z. $18^\circ 47' 1''$
Am 8 Jul. um 12 Uhr — 3 Z. $17^\circ 45' 42''$

also Sonnenlauf in grader Aufsteigung in 24 Stunden : $1^\circ 1' 19''$,
folgl. stündl. Lauf derselben — $2' 33''$

Nun war der stündliche Lauf des Mondes : : : $29' 25''$
subtrahirt : : : $2' 33''$

also des Mondes stündlicher Vorlauf : : $26' 52''$

Am

Am 8ten Julius um 12 Uhr stand der Meridian von ♈ 3 Z. 17° 45′ 42″ = 107° 45′ 42″
und 7 Uhr 322 Minute geben = 115° 37′ 30″

Also um 7 Uhr 42½ Min. war der Meridian von ♈ : : 223° 23′ 12″
Um 7 Uhr 42½ Min. war der Mond von Aries : : 183° 45′ 35″

Folglich des Mondes Stundenwinkel zu Paris : : 39° 37′ 37″
Nun war der beobachtete Stundenwinkel : : : 38° 40′ 0″

Also der Untersch. der Stundenw. 57′ 37″.

Nun berechne man folgendes Verhältniß: Des Mondes stündlicher Vorlauf, oder 26′ 52″ verhält sich zu einer Stunde, wie der Unterschied der Stundenwinkel, oder 57′ 37″ zu 2 Stunden 8′ 40″, welches denn der Zeitunterschied beider Mittagskreise ist. Wird dieser Unterschied in Grade reducirt, so findet man, daß der Ort der Beobachtung ohngefähr 32° 10, west-

westlich von dem Meridiane von Paris liegt. —

Diese Methode hat vor andern den Vorzug, daß sie nur eine einzige Beobachtung erfordert, welche mit einem Octanten, der doch jetzt in den Händen eines jeden Seefahrers ist, verrichtet werden kann. Die Auflösung derselben ist einfach, und erfordert keine Mühe mehr, als die Methode des Herrn Douves, die Breite durch zwey Höhenmessungen an der Sonne zu bestimmen, welche unsre Seefahrer doch beinahe täglich berechnen. Wenn diese Methode auch, wegen den Einfluß der Mondhöhe und Declination desselben, welche beide nicht so sehr zuverlässig sind, einigen Fehlern unterworfen ist, so ist sie dennoch ein äusserst gutes Mittel, um das sogenannte Besteck auf langen Reisen zu berichtigen, wo, ohne alle astronomische

Beobachtungen, ein Irthum von 6 bis 7 Graden in der Länge eben kein ganz ungewöhnlicher Fehler ist.

§. 54.

Als das letzte Mittel, um die Meereslänge zu bestimmen, können wir die Versuche, dieselbe durch die Abweichung der Magnetnadel zu finden, nicht unberührt lassen. Ohne den Werth, oder Unwerth aller dieser Theorien, auf das genaueste prüfen zu wollen, noch ein Namens-Verzeichniß aller Mathematiker, die sich mit dieser Untersuchung beschäftiget, zu geben, wollen wir die Sache bloß aus dem Gesichtspunkte betrachten, aus welchem sie für den Seefahrer, um die Meereslänge daraus bestimmen zu können, nützlich werden kann. Wir werden die Inclination der Nadel dem Naturforscher überlassen, weil diese dem Zwecke unsrer jetzigen Untersuchung durchaus fremd ist, und uns nur auf Digressionen führen würde, die für den Seefahrer eben so überflüssig, als zwecklos seyn würden. Die Möglichkeit der Sache aber, um vermittelst der Fehlweisung der Magnetnadel die Länge auf der See zu bestimmen, wollen wir, ohne uns an irgend eine der bisherigen Theorien zu binden, so faßlich, als möglich vortragen, damit der Leser über ihre Zweckmäßigkeit, oder Unzweckmäßigkeit selbst entscheiden möge.

§. 73.

Man erwarte also hier keine dieser hochtrabenden Hypothesen, die die Grundursache des Phänomens der Abweichung der Magnetnadel, der Inclination und periodischen Veränderung derselben zu entwickeln sich anmaaßt. Dieser Hypothesen, die für die Anwendung zwecklos sind, giebt

giebt es ohnehin genug, und wir glauben ihre Anzahl nicht vermehren zu müssen. Die ganze Voraussetzung, worauf wir diese Theorie zu begründen suchen, ist, daß wir mit Halley, Euler und andern innerhalb der Erde eine magnetische Axe, deren Pole sich um die Pole der Erde drehen, annehmen, ohne uns darum zu bekümmern, ob diese Pole die Endpuncte eines innerhalb der Erdkugel befindlichen magnetischen Körpers sind, oder nicht, indem es uns genug ist, die Erscheinungen zu erklären und dieselben dem Calcul zu unterwerfen. Daß diese magnetische Axe die Erdaxe schneiden muß, erhellet aus der Abweichung der Nadel selbst; denn läge sie mit derselben parallel, so könnte keine Abweichung der Nadel statt finden. Alles, worauf es also hier ankömmt, ist, die jedesmalige Lage dieser Axe, oder vielmehr die geographische Länge und Breite

ihres

ihres Pols, und umgekehrt aus dieser Lage des Pols die Abweichung der Nadel bestimmen zu können, welches ein Paar Aufgaben sind, deren Auflösung für die Schifffahrt äusserst wichtig ist, und die wir uns jetzt aufzulösen bemühen werden.

Es sey zu diesem Endzwecke in Fig. 16 EQ der halbe Aequator, P der Erdpol und p der magnetische Pol, a und b zwey Oerter auf der Erde, wo man die Abweichung der Nadel sehr genau beobachtet hat. Man ziehe nun aus dem Pole P die beiden Erdmeridiane PR und PH durch die Oerter b und a, und ebenfalls aus dem magnetischen Pole p die magnetischen Meridiane pg und pi, so sind die Winkel Pbp und Pap die Abweichungen der Magnetnadel an den Oertern b und a. Ferner ist in dem spärischen Dreiecke aPb, aP das Complement der Breite von a und Pb dasjenige von b und der < aPb = Bogen RH ist gleich dem Längen-Unterschiede beider Oerter. Aus diesen 3 gegebenen Stücken findet man nun die Seite ab nebst den beiden Winkeln abP und baP. Addirt man nun die Abweichung der Nadel, oder den < Pbp zu dem gefundenen < abP, so ergiebt sich < abp, und subtrahirt man die Abweichung Pap von dem so eben gefundenen < baP, so erhält man den < bap. Berechnet man nun aus ab und den Winkeln abp und bap die Seite pb, so hat man dadurch in dem △ Pbp drey Theile gegeben, nemlich die gefundne pb, Pb, nebst dem Abweichungswinkel Pbp, woraus man denn leicht Pp, das Complement der geographischen Breite des magnetischen Pols p nebst dem < pPb, den Längen-Unterschied desselben mit dem Orte b findet.

Auf

Auf diese Art wäre also die Lage des magnetischen Pols aus zwey beobachteten Abweichungen der Nadel genau bestimmet. Wenn nun diese Beobachtungen fortgesetzt würden, und jedesmal die Lage des magnetischen Pols aus denselben bestimmet, so ließe sich der Umlauf desselben um den Erdpol und das Gesetz seiner Bewegung bestimmen und hieraus seine jedesmalige Lage angeben.

Sobald man nun im Stande ist, die Lage des magnetischen Pols zu jeder beliebigen Zeit anzugeben, so läßt sich das zweyte Problem, nemlich die Abweichung der Magnetnadel zu jeder Zeit und für jeden Ort der Erde zu berechnen, sehr leicht auflösen. Denn, gesetzt, man wollte die Abweichung für den Ort b in der 16ten Figur berechnen, so ist in dem Dreieck bPp gegeben, Pp das Complement der Breite des Magnetischen Pols, der < bPp der Längenunterschied desselben mit dem Orte b und pP das Complement der Breite des Orts b, woraus sich denn sehr leicht der < Pbp, oder die Abweichung der Nadel finden läßt. Daß diese Bestimmung der Abweichung der Nadel ein sehr einfaches Mittel, um die geographische Länge auf dem Meere zu finden, brauche ich kaum zu bemerken, weil es eine äusserst bekannte Sache ist, daß der Durchschnitt des magnetischen Meridians mit dem Breitenkreise die Länge eines Ortes bestimmen muß. Wenn unsre Seefahrer, die sich doch schwerlich sobald zu der Berechnung des Mondabstands von einem Fixsterne bequemen und qualifiziren werden, dies Mittel ausüben wollten; so würde sich leicht irgend ein Mathematiker finden, der jährliche Abweichungstabellen für sie berechnete, wodurch dann die ganze Längenbestimmung auf eine bloße Berechnung des Azimuths zurückgeführt werden könnte.

Sechs.

Sechster Abschnitt.

Von der Theorie der so genannten runden oder wachsenden Gradkarten.

§. 74.

Daß diese wachsenden Gradkarten in der Schiffahrtkunde blos darum erfunden sind, damit der Schiffer desto leichter den Weg, den sein Schiff auf dem Meere zurücklegt, berichtigen könne, ist eine so allgemein bekannte Sache, daß wir sie kaum zu bemerken nöthig glauben. Der Weg, den das Schiff zurücklegt, liegt immer in der Richtung eines und des nemlichen Kompaßstriches, und macht dem zufolge immer einerley Winkel mit jedem Meridiane, den er durchschneidet; woraus denn nothwendig folgen muß, daß, wenn man diesen Weg auf einer gewöhnlichen Karte, wo alle Meridiane in einen Punct zusammenlaufen, verzeichnen wollte, derselbe in eine krumme Linie ausarten müßte, welche für das tägliche Bedürfniß des Schiffers sehr unbequem seyn würde. Man hat es daher vorgezogen, die Meridiane auf diesen Karten durch grade und parallele Linien vorzustellen, damit der Weg des Schiffes, der mit diesen Meridianen immer einerley Winkel macht, eine grade Linie werden möchte. Sind aber nun nach Fig. 17. AMP und amP zwey Meridiane, Aa ein Bogenstück des Gleichers, das zwischen diesen beiden Meridianen liegt, und Mm ein korrespondirendes Bogenstück eines Parallels, so siehet man leicht, daß Mm′ Fig. 18, welches den Bogen Mm Fig. 17 vorstellen soll, eben so groß, als A′a, welches das korrespondirende Bogenstück des Gleichers Aa Fig. 17 vorstellt, da doch Mm kleiner als Aa seyn muß,

und

und zwar in dem Verhältnisse von P'M zu CA, das ist, in dem Verhältnisse der Halbmesser der Kreise. Um nun diese Vergrösserung, die man der Mm gegeben, zu compensiren, indem man dieselbe durch M'm vorgestellt; so stellt man die Breite AM Fig. 17 auf diesen Karten durch A'M' Fig. 18 vor, das ist, man macht A'M' so viel größer als AM, als Aa größer, als Mm ist; welches Verhältniß nun bestimmt werden muß.

§. 75.

Es mögen nun zu diesem Endzwecke in Fig. 17. M und R zwey Puncte des Meridians AMP seyn, welche einander unendlich nahe liegen, Mm und Rr die korrespondirenden Bogen der beiden Parallelen. Will man nun Mm und Rr durch die Linien M'm und R'r Fig. 18, welche gleich Aa = A'a sind, vorstellen, so muß man den kleinen Zwischenraum R'M' um eben so viel größer machen, als

als Mm < Aa in Fig. 17 ist, das ist, es muß M'R' : MR = Aa : Mm = CA : P'M = Radius : Cosinus Breite AM seyn. Bezeichnen wir nun die Breite AM mit S, die grade Linie A'M' Fig. 18, welche dieselbe auf der Karte vorstellt, und die wachsende Breite genannt wird, mit S', den Halbmesser CA = CM mit 1, CP', oder den Sinus der Breite AM mit x, so ist $P'M = \sqrt{(1 - xx)}$, $MR = dS =$ dem Elemente des Bogens, $= \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$. Substituirt man diese Werthe in dem letzten Verhältnisse, so hat man $d. S : \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}} = 1 : \sqrt{(1 - xx)}$, und daraus $d. S' = \frac{dx}{1 - xx}$. Um nun S' zu erhalten, muß $\frac{dx}{1 - xx}$ integrirt werden, dessen Integral

gral $= \frac{1}{2}$ Log. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$; also ist $S' =$ Log. $\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$, welches eine Größe ist, zu welcher man keine Constante zu addiren braucht.

Um nun diesen gefundnen Ausdruck bequemer einzurichten, bemerke man, daß der Radius $= 1$ der Sinus von 90° ist, und daß man CP′, oder den Sinus der Breite AM mit x bezeichnet hat, man wird also, anstatt $S' =$ Log. $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ den Ausdruck $S' =$ Log. $\sqrt{\frac{\text{Sin. } 90^\circ + \text{Sin. AM}}{\text{Sin. } 90^\circ - \text{Sin. AM}}}$ haben. Nun aber ist Sin. 90° — Sin. AM : Sin. 90° + Sin. AM = Tang. ($45^\circ - \frac{1}{2}$ AM) : Tang. ($45^\circ + \frac{1}{2}$ AM), also $\frac{\text{Sin. } 90^\circ + \text{Sin. AM}}{\text{Sin. } 90^\circ - \text{Sin. AM}} =$

Tang.

$\dfrac{\text{Tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\,AM)}{(\text{Tang.}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\,AM)}$; folglich $S' =$ Log. $\sqrt{\dfrac{(\text{Tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\,AM)}{\text{Tang.}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\,AM)}}$. Ferner ist aber Tang. $(45^\circ - \frac{1}{2}\,AM) : 1 = 1 :$ Cot. $(45^\circ - \frac{1}{2}\,AM)$; aber Cot. $(45^\circ - \frac{1}{2}\,AM) =$ Tang. $(45^\circ + \frac{1}{2}\,AM)$ und daher Tang. $(45^\circ - \frac{1}{2}\,AM) : 1 = 1 :$ Tang. $(45^\circ + \frac{1}{2}\,AM)$; folglich Tang. $(45^\circ - \frac{1}{2}AM) = \dfrac{1}{(\text{Tang.}\,45^\circ + \frac{1}{2}AM)}$.

Substituirt man diesen eben gefundnen Werth in der Gleichung $S' =$ Log. $\sqrt{\dfrac{\text{Tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\,AM)}{\text{Tang.}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\,AM)}}$, so erhält man $S' =$ Log. $\sqrt{(\text{Tang.}\,45^\circ + \frac{1}{2}\,AM)^2}$, oder $S' =$ Log. (Tang. $(45^\circ + \frac{1}{2}\,AM)$, oder auch $S' =$ Log. Cotang. $(45^\circ - \frac{1}{2}\,AM)$. Nun ist aber $45^\circ - \frac{1}{2}\,AM$ die Hälfte von $90^\circ - AM$, welcher letztre Ausdruck nichts anders als das Comple-

ment

ment der Breite ist. Man hat also endlich den sehr einfachen Ausdruck, nemlich die wachsende Breite, oder $S' =$ Log. Cotang. $\frac{1}{2}$ Complement der Breite. Nimmt man also aus den gewöhnlichen Tabellen den Logarithmus der Cotangente des halben Complements der Breite und multiplicirt denselben durch 2,30258509, dem natürlichen Logarithmus von 10, so ist das Product gleich der wachsenden Breite in Theilen des Halbmessers ausgedrückt. Da es aber bequemer ist, die wachsende Breite in Graden ausgedrückt zu haben, so verfahre man also: $180^\circ : 3{,}1415926 = 1 : x$, so ergiebt sich x, oder die Länge eines Grades $= 0{,}0174533$. Man braucht also nur die wachsende Breite durch 0,0174533 zu dividiren, so giebt der Quotient dieselbe in Graden an. Die wachsende Breite in Graden ausgedrückt ist also

2.30258509.

$$\frac{2.30258509.\ \text{Log. Cotang.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{Compl. der Breite}}{0,0174533}$$

Dividirt man aber 2.30258509 durch 0,0174533, so ist der Quotient gleich 113,9283, woraus denn endlich folgt, daß, um die wachsende Breite in Gradtheilen zu finden, man bloß die Cotangente des halben Complements der Breite durch 113.9283 zu multipliciren braucht.

Will man z. B. die wachsende Breite für 40° Breite haben, so verfahre man also:

Log. Cotang. $\frac{1}{2}$ Complement 40°, oder Log. Cotang. $\frac{1}{2}$ 50° = Log. Cot. 25° = 0.3315275
multiplicirt : 131,9285

giebt : : 43,7115,

dies ist 43° 43′ = 2623 Minuten. Auf diese Art lassen sich die Tabellen der wachsenden Breiten sehr leicht berechnen, oder wenigstens prüfen.

§. 76.

Den Unterschied der Länge bestimmt man durch eine ähnliche Berechnung, wenn man die abgefahrne und bekommene Breite, nebst dem Cours-Winkel kennet. Denn es sey zu diesem Endzwecke in Fig. 19 OQM die loxodromische Linie, oder der Weg, den das Schiff zurückgelegt, Q der Ort der Abfahrt desselben, OA ein Stück des Gleichers, AMP und amP zwey, einander unendlich nahe liegende Meridiane. Stellt man sich nun vor, daß der kleine Bogen Mm dem Gleicher AB parallel sey, so ist der unendlich kleine Triangel Mmr geradelinigt und rechtwinklicht bey m, und daher hat man in demselben mr : Mm = 1 : Tang. < Mrm, indem man den Halbmesser = 1 setzt, und daher Mm = mr. Tang. < mrM. Vergleicht man nun Fig. 17 mit Fig. 19, so hat man nach dem Obigen: Mm : Aa = Cosin.

Brei-

Breite : 1, das ist mr. Tang. $<$ mrM : Aa $=$ Cos. Br. : 1.

Bezeichnet man nun, wie vorher, den Sinus der Breite AM mit x, so ist der Cosinus wiederum $\sqrt{(1 - xx)}$. Der Bogen mr, welcher der Unterschied der beiden Breiten ar und AM ist, wird wiederum das Element des Bogens AM seyn, und sein Ausdruck ist gleich $\frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$.

Bezeichnet man ferner den $<$ mrM mit a und den Unterschied der Länge BA mit z, so ist Aa $=$ d. z; folglich verwandelt sich das so eben gefundne Verhältniß in dieses:

$\frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$. Tang. $<$ a : d. z $= \sqrt{}$ $(1 - xx) : 1$, woraus denn folgt, daß $dz = \text{Tang.} < a. \frac{dx}{(1 - xx)}$. Nun ist aber das Integral von $\frac{dx}{1 - xx}$ gleich $\frac{1}{2}$

Log.

Log. $\frac{(1 + x)}{(1 - x)}$ und man hat also z =
$\frac{1}{2}$ Tang. < a. Log. $\frac{1 + x}{1 - x}$ + C. Um die Constante C zu bestimmen, bemerke man, daß, wenn z = o, welches am Puncte der Abfahrt seyn muß, die Breite AM zur Breite des Punctes der Abfahrt wird. Bezeichnet man nun diese Breite mit t, so muß die Constante C von der Beschaffenheit seyn, daß, wenn man t statt x setzt, auch z = o werden muß. Man hat also o = $\frac{1}{2}$ Tang. < a. Log. $\frac{1 + t}{1 - t}$ + C, und daher C = — $\frac{1}{2}$ Tang. < a. Log. $\frac{1 + t}{1 - t}$; folglich z = $\frac{1}{2}$ Tang. < a. Log. $\frac{1 + x}{1 - x}$ — $\frac{1}{2}$ Log. $\frac{1 + t}{1 - t}$.
Tang. < a, oder z = Tang. < a.
($\frac{1}{2}$ Log.

$\left(\frac{1}{2} \text{Log.} \frac{1 + x}{1 - x} - \frac{1}{2} \text{Log.} \frac{1 + t}{1 - t}\right) =$ Tang. $<$ a. $\left(\text{Log.} \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} - \text{Log.} \sqrt{\frac{1 + t}{1 - t}}\right)$. Wenn man nun eben so, wie in §. 75, verfährt, so wird man finden, daß $\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} =$ Cotang. ($\frac{1}{2}$ Complement von AM) und eben so $\sqrt{\frac{1 + t}{1 - t}} =$ Cotang. ($\frac{1}{2}$ Complement BQ), und daher z, oder der Unterschied der Länge = Tang. $<$ a (Log. Cotang. $\frac{1}{2}$ Complement der bekommenen Breite) — Log. Cotang. $\frac{1}{2}$ Complement der abgefahrnen Breite), woraus denn die sehr einfache Regel, den Unterschied der Länge zu finden, entspringt, nämlich:

Man

Man multiplicirt bloß den Unterschied der wachsenden oder vergrößten Breite durch die Tangente des Cours-Winkels, um den Unterschied der Länge zu erhalten.

Sieben-

Siebenter Abschnitt.

Beweis der Methode des Herrn Douwes, um die Breite eines Orts durch zwey ausser dem Meridian beobachteten Sonnenhöhen zu bestimmen.

§. 77.

Obgleich diese Methode unter dem Namen der Breite außer dem Mittage fast allen Seefahrern practisch bekannt ist, und täglich auf ihren Schiffen mechanisch ausgeübt wird, so ist doch der Beweis derselben nur äußerst wenigen unter ihnen bekannt, und darum glauben wir eben nichts Unnützes zu thun, wenn wir denselben hier auseinander zu setzen suchen

§. 78.

§. 78.

Man setzt, wie bekannt, dabey voraus, daß die Breite des Schiffes beynahe gegeben sey, nemlich so, wie sie das Schiffs-Journal immer anzugeben pflegt, und welche der Schiffer die gemuthmaßte Breite nennt, deren Berichtigung dann durch die Beobachtung gesucht wird. Es sey zu diesem Endzwecke nach Fig. 20 und 21 ZTPR der Mittagskreis, ZWN der Horizont, Z der Süd- und N der Nordpunct desselben, W der Ort, wo das Schiff sich befindet, und T der Scheitelpunct desselben. In P sey der Pol und LW der Gleicher, *) orthographisch auf den Mittagskreis projecirt, so ist

*) Eine orthographische Projection nennt man diejenige Abbildung, wo das Auge senkrecht und in einer unendlichen Entfernung von dem großen Kreise sich befindet, auf dessen Fläche die Abbildung entworfen wird.

ist $<$ LWT, oder LT die Breite des Orts. Ferner stelle aHbR den Parallelkreis der Sonne vor, der den Mittagskreis in H schneidet, und welcher, da er auf demselben senkrecht steht, in der Linie HG projecirt ist *). Die Höhe der Sonne sey nun in a und b beobachtet, an einer Seite des Mittagskreises nach Fig. 21. oder an beiden Seiten desselben, wie in Fig. 20. Man halbire den Bogen ab in M, und ziehe GM und ab, so halbiret GM auch ab senkrecht in d. Da man aus dem Zeitverlauf zwischen den beyden Beobachtungen den Bogen ab, folglich auch aM in Graden kennet, indem man 15 Grad auf eine Stunde rechnet, so kömmt es jetzt darauf an, aus den Beobachtungen ZH und aH zu finden. Ersteres ist die Höhe,

zu

*) Siehe Herrn Professor Kästners Anfangsgr. der Perspectiv, das 28ste Exempel.

zu welcher die Sonne im Mittagskreise gelanget, und woraus man denn die Breite eben so berechnet, als wenn die Sonnenhöhe zur Mittagszeit wäre beobachtet worden. Aus aH findet man die Zeit, welche zwischen der Beobachtung zunächst am Mittagskreise und der Mittagszeit verflossen ist, welche zur Berichtigung der Uhr dienet.

§. 79.

Wenn man nun die Punkte a und b durch senkrechte Linien auf den Mittagskreis in A und B projiciret, und auf ZN die Linien AD und BE senkrecht ziehet, so ist AD einer Linie gleich, die von a senkrecht, auf die Horizontalebne fiele, oder dem Sinus der Sonnenhöhe in a; und BE einer Linie von b senkrecht auf die Horizontalebene gezogen, oder dem Sinus der Sonnenhöhe in b. Wenn man nun BC senkrecht auf AD ziehet, so ist AC dem Unterschiede der Sinusse beider Sonnenhöhen in a und b gleich. Nun ist:

$$AC : AB = r : \text{sec. } BAC.$$

Weil nun BC der ZW und AB der LW parallel, so ist CBA = ZWL und BAC = LWT, der Breite des Schiffs, welche man beinahe kennt, und welche, der Kürze wegen, in der Folge Br. heißen mag. Man hat also $AB = \frac{AC. \text{ sec. Br.}}{r}$, und zwar in Beziehung auf der Kugel oder der Tafel Halbmesser, weil AC darin gegeben. Von a ziehe man nun auf bB eine senkrechte Linie ar, so hat man ar = AB. Aus ar und ab findet man nun den Winkel abr. Es ist aber abr = MGH, weil ab auf MG und br auf HG senkrecht stehen. Man hat daher: ar : ab = r : Cosec. MGH = Sin. MGH : r. ab ist nun = 2 Sinus aM, und folglich in Beziehung auf

den

den Halbmesser des Parallels GM bekannt. Aber ar = AB hat man in Beziehung auf den Halbmesser der Kugel oder der Tafel ausgedrückt, und deswegen muß man dafür einen Ausdruck in Beziehung auf den Halbmesser des Parallels suchen. Es verhalten sich aber die Ausdrücke einer Größe umgekehrt wie ihre Maaßen, und wenn man den Ausdruck der Größe AB in Beziehung auf den Halbmesser der Kugel AB, und in Beziehung auf den Halbmesser des Parallels ar nennet, so ist

$$ar : AB = WL : GH = r : \text{Cos. Declin.} \odot = \text{Sec. Declin.} : r,$$

und daher

$$ar = \frac{AB \times \text{Sec. Decl.} \odot}{r} = \frac{AC \times \text{Sec. Br.} \times \text{Sec. Decl.} \odot}{r^2},$$ wenn

man für AB den oben gefundnen Werth

setzet.

setzet. Dadurch erhält man also *) 2 Sin.

$$aM : \frac{\text{Sec. Br.} \times \text{Sec. Decl.} \odot \times AC}{r^2}$$

$= \text{Rad.} : \text{Sin. MGH}$, oder Sin. aM : r

$$= \frac{\text{Sec. Br.} \times \text{Sec. Dec.} \odot \times AC}{r^2} : 2$$

Sin. MGH, und weil Sin. aM : r = r : Cosec. aM, r : Cosec. aM =

$$\frac{\text{Sec. Br.} \times \text{Sec. Dec.} \odot \times AC}{r^2} : 2 \text{ Sin.}$$

MGH, daher wird Sin. MGH =

$$\frac{\text{Sec. Br.} \times \text{Sec. Decl.} \odot \times \text{Cosec. aM} \times AC}{2\, r^3}$$

welcher letzte Ausdruck für den Gebrauch der Logarithmen sehr bequem ist.

Diesen eben gefundnen Winkel MGH oder Bogen MH, den Abstand der Mitte der

*) Man erhält dies Verhältnis, wenn man im Dreieck abr, statt ab : ar = r : Sin. abr = Sin. MGH die gefundnen Werthe substituiret.

der Zeit zwischen den beiden Beobachtungen von der Mittagszeit, nennet man die Mittelzeit, und die Hälfte der zwischen den Beobachtungen verflossenen Zeit die halb verflossene Zeit, um sich kürzer ausdrücken zu können, wenn man aus der obigen Formel eine Regel machen will.

§. 80.

Aus Betrachtung der Figuren sieht man leicht. daß M die halbverflossene Zeit vor der Mittagszeit falle, wenn die zweite Beobachtung eine größere Sonnenhöhe gegeben, als die Erste, und daß sie Nachmittage falle, wenn das Gegentheil statt gefunden. Ferner folgt noch, wenn die halbverflossene Zeit größer als die Mittelzeit, das ist, wenn Ma größer als MH ist, so sind die Beobachtungen an beyden Seiten des Mittagskreises, das ist, vor und nach Mittage gemacht. Wenn aber solches um-

ge-

gekehrt erfolget, so sind beide Beobachtungen an einerley Seite des Mittagskreises, beide vor Mittage oder beide nach Mittage gemacht.

Der Unterschied zwischen der halbverflossenen Zeit und Mittelzeit giebt nun in allen Fällen die Zwischenzeit zwischen Mittag, und der Zeit der Beobachtung der größten Sonnenhöhe. Und da man nun weis, ob dieselbe vor oder nach Mittage gemacht worden, so kann man die Tageszeit dafür finden; die Zeit, welche die Uhr damals angegeben, damit vergleichen, und dadurch die Uhr berichtigen.

§. 81.

Um nun ferner HK, das ist, den Sinus der Sonnenhöhe im Meridian zu finden, ziehe man AF auf HK senkrecht, so ist $HK = HF + AD$, wovon AD, als der Sinus der größten beobachteten Sonnen-

nen-

nenhöhe bekannt ist. Um auch HF zu finden, hat man: HA : HF = Sec. AHF : r.

Es ist aber AHF = BAC = LT gleich der gemuthmaßten Breite, und HA ist der Quersinus (sinus versus) von dem gefundenen Bogen aH. Durch dieser Ausdruck wird nun HA in Beziehung auf den Halbmesser des Parallels ausgedrückt, da man aber HF in Beziehung auf den Halbmesser der Kugel sucht, so muß man den Ausdruck für HA auch auf diesen Halbmesser zurückführen. Es ist aber

HA (in Beziehung auf GH) : HA (in Bez. auf WL) = WL : GH = r : Cos. Decl. ☉ = Sec. Decl. ☉ : r.

Also:

sin. vers. Ha : HA = Sec. Decl. ☉ : r.

$$HA = \frac{r \times \text{Sin. Vers. Ha}}{\text{Sec. Decl. ☉}}$$

und daher

*) $\text{Sec. Br.} : r = \frac{r \times \text{Sin. Vers. } Ha}{\text{Sec. Decl. } \odot} : HF$

dies giebt nun

$$HF = \frac{r^2 \times \text{Sin. Vers. } Ha}{\text{Sec. Br.} \times \text{Sec. Decl. } \odot}$$

und diese letzte Formul logarithmisch ausgedrückt, giebt

$$\text{Log. } HF = \text{L. Sin. v } Ha - (\text{L Sec. Br.} - \text{L. } r) - (\text{L. Sec. Decl. } \odot - \text{L. } r)$$

Dieses HF oder Anwachsen des Sinus der mittäglichen Sonnenhöhe über den Sinus der beobachteten größten Sonnenhöhe nennet man das Steigen. Wenn man dasselbe nun zu dem Sinus der beobachteten größten Sonnenhöhe addiret, so erhält man den Sinus der mittäglichen Sonnenhöhe, deren

*) Dies Verhaltniß entsteht daher, wenn man in der Proportion Sec. AHF : r = HA : HF für HA den so eben gefundnen Werth setzt.

deren Complement ihr Abstand vom Scheitelpunkte ist. Und daraus findet man mit der bekannten Abweichung der Sonne die Breite des Orts auf gewöhnliche Art.

§. 82.

Ehe wir aber diesen Gegenstand verlassen, müssen wir noch etwas über die Characteristik der Logarithmen für die Logarithmischen Linien in Ansehung der kleinern Tafeln hier hinzufügen. Diese Charakteristik gehöret allemal für solche Zahlen, die für den Halbmesser 10,000,000 gehören. In den gewöhnlichen kleinen Tafeln sind die drey letzten Zahlen für die Logarithmischen Linien weggelassen, und sie gehören daher für den Halbmesser 10,000,000, aber die Charakteristik der Logarithmen ist unverändert geblieben. Wenn man also hiernach rechnen will, und AC oder den Unterschied der Sinusse beider Sonnenhö-

hen

hen genommen hat, so hat dieser Unterschied 3 Zahlzeichen weniger, als er haben würde, wenn die Sinus der größern Tabellen gebraucht wären. Wenn man nun für diesen gefundenen Unterschied den Logarithmen aus den Tafeln für die natürlichen Zahlen sucht, so ist die Charakteristik um 3 kleiner, als sie für die Rechnung nach den größern Tafeln seyn würde. Wenn man also diesen Logarithmen wieder gebrauchen will, eine trigonometrische Linie zu bestimmen. und in den Logarithmen dafür aufzusuchen, so wie hier der Log. Sin. MGH durch den Log. AC bestimmt wird, so muß man vorher zur Charakteristik des Log. AC noch 3 addiren. Und wenn man noch kleinere Tafeln gebraucht, wie gewöhnlich die Seefahrer thun, wo der Halbmesser nur zu 100,000 angenommmen ist, und wo in den trigonometrischen Zahlen der größern Tafeln

die

die 5 letzten Zahlen weggeworfen sind und die Charakteristik ihrer Logarithmen unverändert geblieben, so muß man zu der Charakteristik des für AC gefundenen Logarithmen 5 hinzusetzen.

Wenn man daher aus den Logarithmen der trigonometrischen Linien eine Größe selbst bestimmen will, so muß man von der Charakteristik dieser Logarithmen vorher 3 oder 5, nachdem man größere oder kleinere Tafeln gebraucht hat, wegnehmen, und dann für solchen Logarithmen in den Tabellen für die natürlichen Zahlen die zugehörige Zahl aufsuchen. Wenn man aber aus

Log. HF = L. Sin. v. Ha — (L. Sec. Br. — L. r) — (L. Sec. Decl. ☉ — L. r)

HF selbst sucht, und den L. Sin. vHa aus r — Cosinus Ha gesunden, und für diese Zahl dann aus einer Logarithmentafel natürlicher

licher Zahlen den Logarithmen gesucht hat, so fällt die Abänderung der Charakteristik von selbst weg; denn bey den übrigen beyden Säzzen ist es diesmal nicht nöthig, weil der Unterschied des Log. Sec. und Log. R. einerley bleibt, man mag von beyder Charakteristik eine Zahl wegnehmen oder nicht.

§. 83.

Die Berechnung selbst ist nun nicht weitläuftig, und kann ziemlich abgekürzet werden, welches die Betrachtung der Formeln an die Hand giebt. Man hat nur zwey, und in beiden kömmt einerley Größe vor, die man also nur einmal rechnen darf.

I. Log. Sin. Mittelzeit = (Log. Sec. Br. — Log. r + L. Sec. Decl. ☉ — Log. r) + L. Cos. halbverfloßner Zeit — L. r. + Log. Unterschied der ☉ Höhen.

II. Log. Steigens = L. Sin. v. der höch-

sten

sten ☉ Höhe vom Mitt. — (L. Sec. Br. — L. r. + L. Sec. Decl. ☉ — L. r.) wo in beiden L. Sec. Br. — L. r + L. Sec. Decl. ☉ — L. r. vorkomt, welche Zahl Herr Douwes die Zahl A nennet. Wir wollen, um mehrerer Deutlichkeit willen, ein Exempel nach diesen Formeln auflösen.

§. 84.

Gesetzt Jemand wäre im Jahre 1751 auf der gemuthmaßeten N. Breite von 49°0′, die Abweichung der Sonne wäre nördlich = 23°27′, und er beobachtete nach der unverbesserten Schifsuhr die Höhe der Sonne zweimal, nemlich:

um 11 Uhr 12′, Höhe des Mittelpunkts der Sonne 62°49′,

um 2 Uhr 4′ Höhe des Mittelpunkts der Sonne 56°1′. Man frägt nach der mittäglichen Breite?

1)

1) Man sucht die Zwischenzeit der Beobachtungen, indem man die Zeit der Ersteren von der Zeit der letztern (zu welcher vorher 12 Stunden addirt werden) subtrahiret. Diese Zwischenzeit halbiret man, und multipliciret das Gefundene mit 15, schreibt Grade und Minuten statt Stunden und Zeitminuten, so erhält man die halbverfloßne Zeit in Circultheilen

14 Uhr 4′ Zeit der letzten Beobachtung
11 Uhr 12 Zeit der ersten Beobachtung

2 Uhr 52′ Zwischenzeit
1 St. 26′ halbverfloßne Zeit
15)

21° 30′ halbverfloßne Zeit in Circultheilen.

2) Man ziehe von dem Secantlogarithmen der gemuthmaßten Breite 10, das ist, den Logarithmen des Halbmessers ab, verfahre eben so mit dem Secantlogarith-

rithmen der Sonnendeclination, und addire beides.

Log. sec. 49° 0 — Log. r. = 018306
Log. sec. 23° 27 — Log. r. = 003744

A = 0,22050

3) Man nehme den Unterschied der Sinusse beider Sonnenhöhen, suche in der Logarithmentafel der natürlichen Zahlen dafür den Logarithmen, und setze 5 zur Charakteristik desselben hinzu.

Sin. 62° 49 = 88955
Sin. 56° 1 = 82920

6035

Log. 6035 = 378067
+ 5.

8.78067.

4) Dann nehme man den Cosecantlogarithmen der halbverfloßnen Zeit, und

 ziehe

ziehe den Logarithmen des Halbmessers davon ab.

Log. Cosec. 21° 30′ — Log. r = 0,43592.

5) Man addire die in N°. 2, 3, 4, erhaltene Logarithmen, ziehe von der Summe den Logarithmen der Zahl 2 ab, so hat man den Sinuslogarithmen der Mittelzeit. Der Unterschied zwischen der dadurch erhaltenen Mittelzeit und halbverflossenen Zeit giebt den Abstand der grösten beobachteten Sonnenhöhe vom Meridian, welcher durch 15 dividiret, und Stunden, Zeitminuten, Zeitsekunden, statt Grade, Minuten, Sekunden gesetzt, den Unterschied zwischen der Beobachtung der grösten Sonnenhöhe und dem Mittage, und also die Tageszeit einer solchen Beabachtung angiebt, wodurch die Uhr berichtiget werden kann.

Log. N°. 2 = 0,22050
Log. N°. 3 = 8,78067
Log. N°. 4 = 0,43592

9,43709
Log. 2 = 0,30103

Log=Sinus Mittelzeit = 9,13606
Mittelzeit in Circultheilen = 7° 52′
halbverfloßne Zeit = 21° 30′

Abstand der höchsten Be=
obachtung vom Mittage = 13° 38′
15)

Zeit der h. Beobachtung
vom Mittage = 54′ 32″
Tageszeit der h. Beob. = 11 Uhr 5′ 28″

Uhrzeit der h. Beob. = 11 Uhr 12′ 0″

Die Uhr gieng zu früh = 6′ 32″.

6) Man suche nur weiter den Quer=
sinus von dem gefundenen Abstande der

höchsten Beobachtung vom Meridiane, das ist, man subtrahire vom Halbmesser den Cosinus des gefundenen Abstandes, und suche für den Rest den Zahllogarithmen auf.

Halbmesser =	1000000
Log. Cosin. 13° 38′ =	998758
	1242

Log. 1242 = 3,09412.

7) Zu diesem Logarithmen addire man den Logarithmen A Num. 2, so hat man den Logarithmen des Steigens, wofür man in der Zahllogarithmentafel die Zahl sucht, und zu dem Sinus der grösten Sonnenhöhe addiret, so erhält man den Sinus der mittäglichen Sonnenhöhe und aus den Sinustafeln die mittägliche Sonnenhöhe selbst. Zu deren Complement addiret man die nördliche Sonnen-Declination,

nation, und die südliche zieht man davon ab, um die Breite zu erhalten.

Log. N°. 6	: : :	309412 —
Log. N°. 2	: : :	0,22050 —
Log. des Steigens	=	3,31462
Zahl dafür	=	2064
Sinus 62° 49′	=	88955
Sinus der mittäglichen Sonnen-Höhe.	=	91019
Mittägliche Sonnenhöhe	=	65° 32
ihr Complement	=	24° 28
Nördliche ☉ Declination	=	23° 27
Breite zu Mittage	=	47° 55

Ueber die correspondirenden Sonnenhöhen.

§. 85.

Um den Gang einer Uhr zu untersuchen, wenn man an einem und demselbigen Beobachtungsorte bleibt, und das Ge-

Gestirn, dessen Höhen man beobachtet, seine Abweichung nicht verändert, kann man sich keiner genauern Methode bedienen, als derjenigen, um in zwey auf einander folgenden Tagen die beiden Augenblicke an jedem Tage zu bemerken, wenn die Sonne die nemliche Höhe über dem Horizont erreicht. Das Mittel zwischen diesen beiden Zeitpuncten würde die Zeit seyn, welche die Uhr zu Mittage hätte zeigen müssen, so daß, wenn die Beobachtungen eines jeden Tages die nemliche Stunde gäben, man auch sicher darauf würde rechnen können, daß der Gang der Uhr regelmäßig sey, und der Unterschied zwischen dem Mittage und der durch die Uhr angegebene Zeit müßte dann der absolute Fehler der Uhr seyn. Wenn man aber im Gegentheile einen Unterschied in diesen Zeitpuncten in zwey auf einander folgenden Tagen fände, z. B., wenn man fände, daß die Uhr am ersten Mittage 12 Uhr 4′ hätte zeigen müssen, und daß sie am Mittage des folgenden Tages 12 Uhr 2′ hätte zeigen sollen; so würde man daraus folgern müssen, daß diese Uhr am ersten Tage um 4 Minuten zu schnell, am zweiten aber nur um 2′ zu schnell gegangen, so, daß sie um 2′ in vier und zwanzig Stunden zu langsam gehen müsse.

§. 86.

Wenn aber während den beiden Beobachtungen des nemlichen Tages die Sonne ihre Declination verändert, und der Beobachter seinen Ort, so ist es offenbar, daß die Sonne bey der nämlichen Höhe Nachmittags nicht die nemliche Entfernung vom Meridiane, als des Vormittags haben könne, und daß, dem zufolge die Mittagszeit, welche aus den Beobach-

tun-

tungen zweier correspondirenden Höhen abgeleitet, eine Verbeßrung bedürfe. Wenn das Gestirn, dessen Höhen gemessen, die Sonne ist und die Ortsveränderung des Beobachters nicht größer, als der zurückgelegte Weg des Schiffes in einigen Stunden, so können die Veränderungen der Declination und der Polhöhe als Differenzialien angesehen werden, und bezeichnet man den Abstand der Sonne vom Scheitelpunct, der unveränderlich bleibt, mit C, das Complement der Polhöhe mit a, das Complement der Sonnendeclination mit b und den Stundenwinkel bey der ersten Beobachtung mit e, so hat man für Cos. C nach §. 18, wenn man daselbst die Buchstaben mit den oben angegebenen verwechselt, den Ausdruck. Cos. C = Cos. a. Cos. b + Sin. a. Sin. b. Cos. e, und differenziirt man diesen Ausdruck

druck nach §. 26 und 27, so erhält man, da C unveränderlich ist, d. Cos. C = Cos. a. d. Cos. b. + Cos. b. d. Cos. a + Sin. a. Cos. e. d. Sin. b + Sin. b. Cos. e. d. Sin. a + Sin. a. Sin. b. d. Cos. e, oder o = — db. Sin. b. Cos. a — da. Sin. a. Cos. b + Sin. a. Cos. e. db. Cos. b + Sin. b. Cos. e. da. Cos. a — Sin. a. Sin. b. de. Sin. e., oder Sin. a. Sin. b. de. Sin. e = — da (Sin. a. Cos. b — Sin. b Cos. a. Cos. e) — db (Sin. b. Cos. a — Sin. a Cos. b. Cos. e), dies durch Sin. a. Sin. b. Sin. e dividirt, giebt de = — da

$$\left(\frac{\text{Cot. b}}{\text{Sin. e}} - \text{Cot. a. Cot. e}\right) - \text{db}$$

$$\left(\frac{\text{Cot. a}}{\text{Sin. e}} - \text{Cot. b. Cot. e}\right),$$ welches

also

also die Veränderung des Zeitwinkels e ist. Bezeichnet man nun die zwischen beiden Beobachtungen verfloßne Stundenzahl mit t und mit d. M den Längenunterschied der beiden Beobachtungs-Oerter, so hat man $e + e + de = 15^\circ . t - dM$, oder $2e + de = 15^\circ . t - dM$,

und hieraus $e = \frac{15^\circ . t - dM - de}{2}$,

also auch $\frac{e}{15^\circ}$, oder die Zeit, welche die Uhr bey der ersten Beobachtung hätte

zeigen sollen, $= \frac{1}{2}\left(\frac{t - dM - de}{15^\circ}\right)$.

Da aber beide dM und de in Vergleichung mit $15^\circ . t$ sehr klein sind, so ist es genug, um für e in dem Werthe von

de bloß $\frac{15^\circ . t}{2}$ zu substituiren, wodurch

man

man denn erhält $de = - da \left(\frac{\frac{Cot.\ b}{Sin.\ 15^{\circ}.\ t}}{2} \right.$

$\left. - Cot.\ a.\ Cot.\ \frac{15^{\circ}.\ t}{2} \right) - db$

$\left(\frac{\frac{Cot.\ a}{Sin.\ 15^{\circ}.\ t}}{2} - Cot.\ b.\ Cot.\ \frac{15^{\circ}\ t}{2} \right).$

Nun ist aber Cot. b = Tangent Declination und Cot. a = Tangent Breite,

also $de = - da \left(\frac{\frac{Tang.\ Declin.}{Sin.\ 15^{\circ}\ t.}}{2} - \right.$

$\left. Tang.\ Br.\ Cot.\ \frac{15^{\circ}.\ t}{2} \right) - db$

$\left(\frac{\frac{Tang.\ Br.}{Sin.\ 15^{\circ}.\ t}}{2} - Tang.\ Declin.\ Cot. \right.$

$\left. \frac{15^{\circ}.\ t}{2} \right).$ Setzt man nun für da und

db

db die kleinen Veränderungen der Breite und Declination während den beiden Beobachtungen in Minuten, oder Secunden ausgedrückt, so erhält man leicht den Werth von de in Minuten, oder in Secunden. Da man ferner aus $\frac{e}{15^\circ} = \frac{1}{2}$, $\left(\frac{t - dM - de}{15^\circ}\right)$ auch $\frac{e}{15^\circ} - \frac{1}{2}$ $\left(\frac{t + dM + de}{15^\circ}\right)$ erhält, so ist auch, wenn man die Zeit der Uhr bey der Vormittags-Beobachtung mit h bezeichnet,

$$h + \frac{e}{15^\circ} = h + \tfrac{1}{2} t - \tfrac{1}{2}\left(\frac{dM + de}{15^\circ}\right).$$

Nun ist aber $h + \frac{e}{15^\circ}$ die Zeit, welche die

Uhr

Uhr am Mittage hätte zeigen sollen, und $h + \frac{1}{2} t$ ist die Zeit, welche sie gezeigt haben würde, wenn weder Veränderung der Declination, noch des Orts Statt gefunden hätte; folglich ist die Correction, die bey der gefundnen Mittagszeit angebracht werden muß, gleich

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{dM + de}{15^\circ} \right),$$ welche nemlich von dem Mittel der Beobachtungen subtrahirt werden muß, wenn man westwärts gesegelt ist, und der Werth von de positiv. Ist man aber nach Osten gesegelt, so wird dM negativ. Das Zeichen von de wird durch diejenigen von da und db bestimmt. Wir haben hier angenommen, daß da und db beide zugenommen, wenn aber Eine, oder

auch

auch beide abnehmen, so verwandelt man in dem Werthe von de bloß die Zeichen ihrer kleinen Veränderungen da und db in die entgegengesetzten.

Delmenhorst,
Gedruckt bei Georg Jöntzen.

Fig 14.

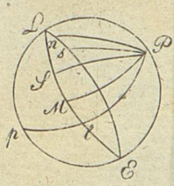
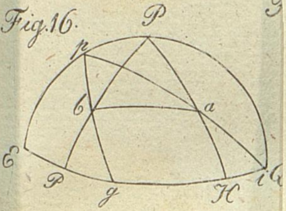


Fig. 16.

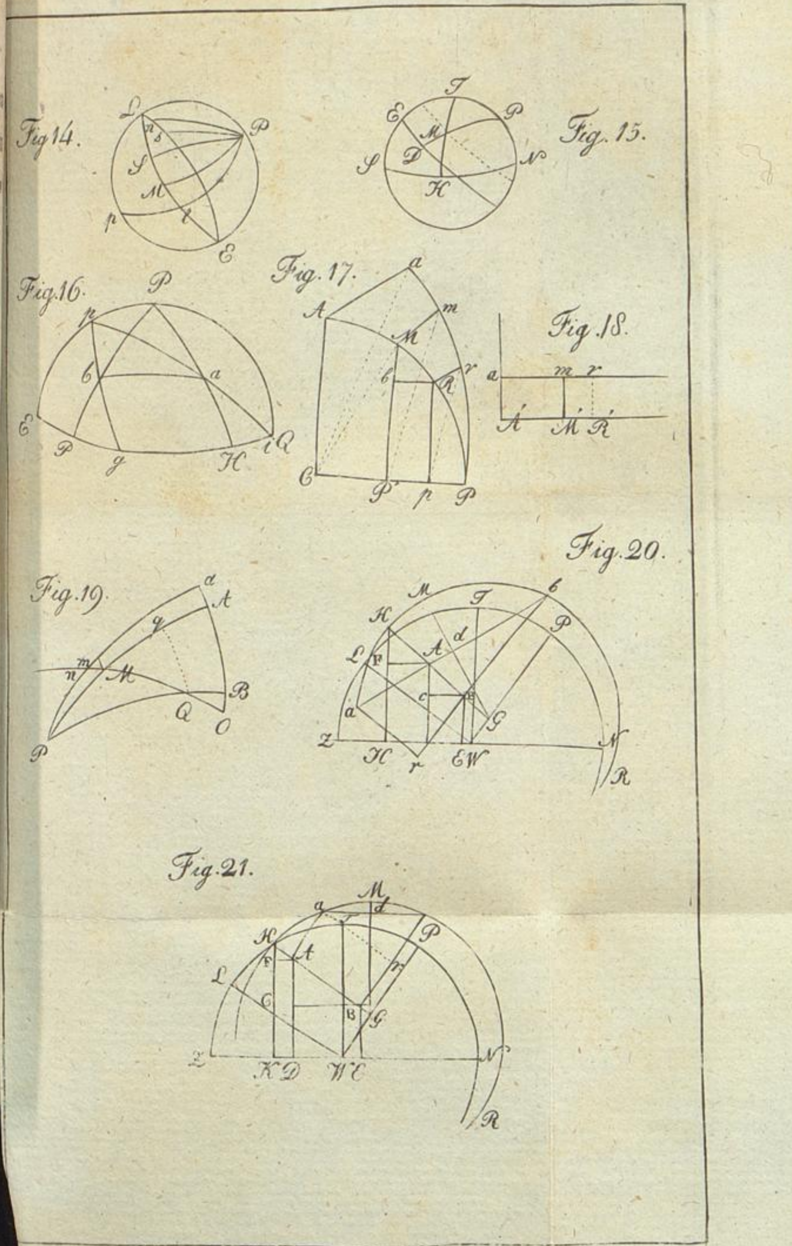


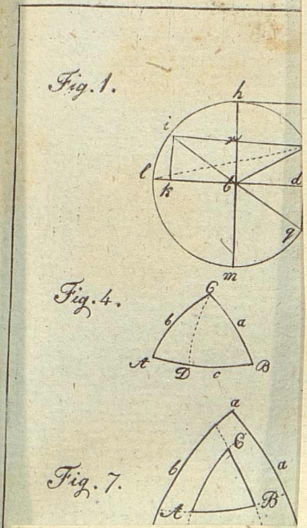
bey Joh. Heinrich Müller.

1 8 0 7.

auch beide abnehmen, so verwandelt man in dem Werthe von de bloß die Zeichen ihrer kleinen Veränderungen da und db in die entgegengesetzten.

Delmenhorst,
Gedruckt bei Georg Jöntzen.





bey Joh. Heinrich Müller.

1807.

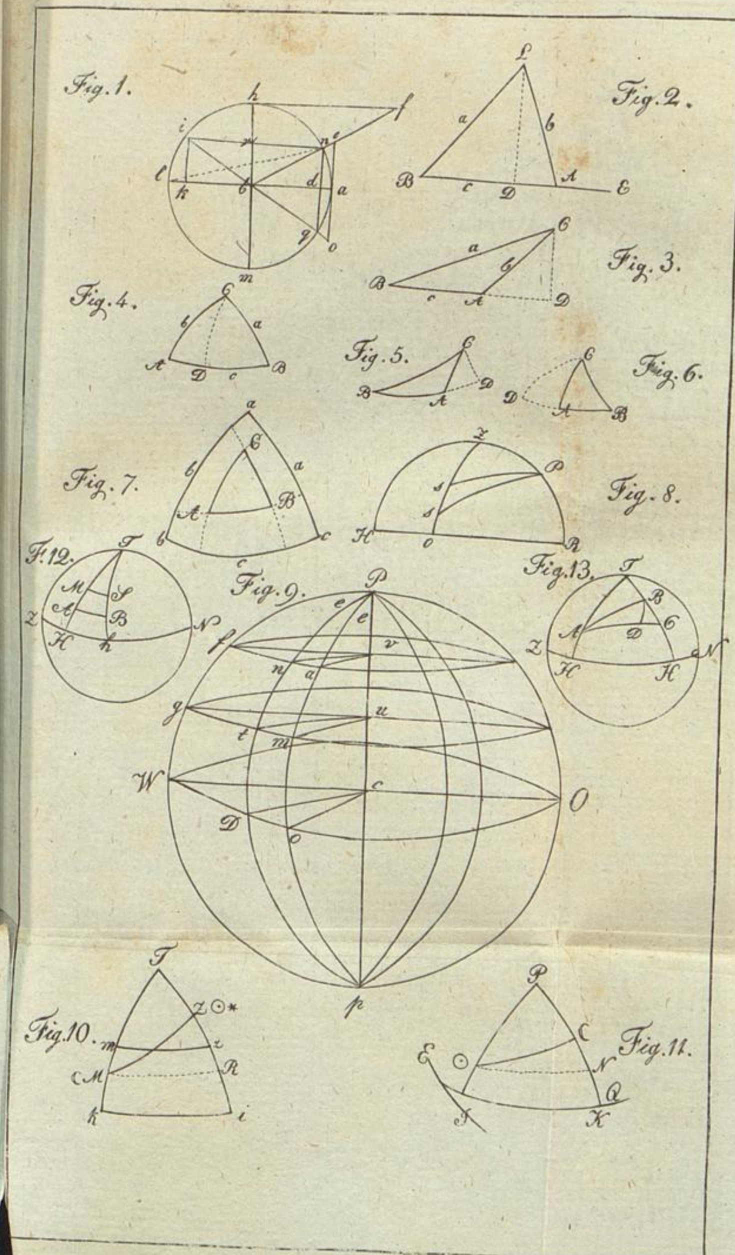


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
F. 12.
Fig. 9.
Fig. 13.
Fig. 10.
Fig. 11.

S

Doc